Гипербола

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ или } y^2=\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2.$$

Распространение света в приближении геометрической оптики можно рассматривать с точки зрения минимальности времени, необходимого для прохождения луча между двумя точками. В терминах представленной задачи будем рассматривать распространение параллельных лучей вдоль оси *x* в направлении ее возрастания (см. рис.):

$$t\left(x_d\right)=t_{media}+t_{vacuum}=n\frac{x\left(y^2\right)-x_{-\infty}}{c}+\frac{\sqrt{\left(x_d-x\left(y^2\right)\right)^2+y^2}}{c}.$$

Для описания $x\left(y^2\right)$ выберем отрицательную ветвь гиперболы:

$$x\left(y^2\right)=-\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2y^2+a^2}.$$

Обозначим также $\left(a/b\right)^2=\lambda^2$. В таких обозначениях

$$t\left(x_d\right)c=-n\left(\sqrt{\lambda^2y^2+a^2}+x_{-\infty}\right)+\sqrt{\left(x_d+\sqrt{\lambda^2y^2+a^2}\right)^2+y^2}=$$
$$-const-n\sqrt{\lambda^2y^2+a^2}+\sqrt{x_d{}^2+\left[\lambda^2+1\right]y^2+a^2+2x_d\sqrt{\lambda^2y^2+a^2}}.$$

Точка, в которой будут фокусироваться все лучи, соответствует условию параметрической независимости $t\left(x_d\right)$ от *y*. Следовательно, должно выполняться условие $\frac{\partial t\left(x_d\right)}{\partial y}=0$:

$$\frac{\partial t\left(x_d\right)}{\partial\left(y^2\right)}c=-n\frac{\lambda^2}{2\sqrt{\lambda^2y^2+a^2}}+\frac{\left[\lambda^2+1\right]+x_d\frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^2y^2+a^2}}}{2\sqrt{x_d{}^2+\left[\lambda^2+1\right]y^2+a^2+2x_d\sqrt{\lambda^2y^2+a^2}}}=0.$$

Оно должно выполняться при любых *y*, в том числе и для *y*=0:

$$-n\lambda^2+\frac{\left[\lambda^2+1\right]a+\lambda^2x_d}{x_d+a}=0\Leftrightarrow n\lambda^2\left(x_d+a\right)=\left[\lambda^2+1\right]a+\lambda^2x_d\Leftrightarrow$$
$$x_d\lambda^2\left(n-1\right)=a\left[1-\lambda^2\left(n-1\right)\right].$$

Окончательно получаем: $x_d=a\frac{1-\lambda^2\left(n-1\right)}{\lambda^2\left(n-1\right)}$. (1)

Эксцентриситет по определению: $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{\sqrt{\lambda^2+1}}{\lambda}$.

Положение положительного фокуса определяется выражением $F_2=a\varepsilon$.

Вычислим *n* при условии, что $x_d=F_2$:

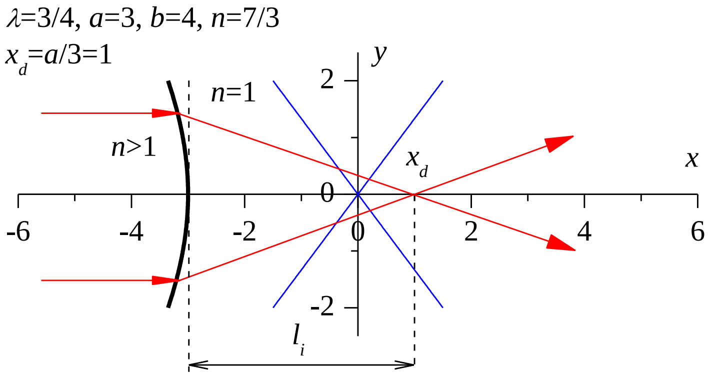
$$x_d=a\frac{\sqrt{\lambda^2+1}}{\lambda}=a\frac{1-\lambda^2\left(n-1\right)}{\lambda^2\left(n-1\right)}\Leftrightarrow$$

$$\lambda\left(n-1\right)\sqrt{\lambda^2+1}=1-\lambda^2\left(n-1\right)\Leftrightarrow$$

$$\lambda^2(n-1)^2(\lambda^2+1)=1+\lambda^4(n-1)^2-2\lambda^2(n-1)\Leftrightarrow$$
$$\lambda^2(n-1)^2=1-2\lambda^2(n-1)\Leftrightarrow$$
$$\lambda^2(n-1)^2+2\lambda^2(n-1)+\lambda^2=\lambda^2+1\Leftrightarrow n=\frac{\sqrt{\lambda^2+1}}{\lambda}=\varepsilon\,.$$

Что и требовалось доказать.

Рассмотрим пример:



В этом примере ε=5/3, F_2=5.

Для l_i, расстояния от вершины гиперболы до точки фокусировки лучей, равного 4, т.е. $x_d=a/3=1$.

Можно рассчитать показатель преломления, пользуясь (1):

$$\lambda^2(n-1)=3\left[1-\lambda^2(n-1)\right]\Leftrightarrow\lambda^2(n-1)=3/4\Leftrightarrow 9/16\cdot(n-1)=3/4\Leftrightarrow n=4/3+1\,.$$

Рассчитаем теперь для трех лучей длину оптического хода до точки фокусировки:

$l_{y=0}=4,\ x_{cross}$=-3,

$l_{y=1}=3.997303,\ x_{cross}=-\frac{3}{4}\sqrt{17}$=3.09233,

$l_{y=2}=3.965234,\ x_{cross}=-\frac{3}{2}\sqrt{5}$=3.3541.

Легко видеть, что соотношения выполняются приближенно, только для лучей при малых y. Это происходит вследствие того, что в выражении

$$\Delta l(x_d)=\Delta t(x_d)c=-n\sqrt{\lambda^2y^2+a^2}+\sqrt{x_d{}^2+\left[\lambda^2+1\right]y^2+a^2+2x_d\sqrt{\lambda^2y^2+a^2}}$$

невозможно, в общем случае, избежать явной зависимости от y.

Я полагаю, что приведенные соображения не вполне верны. Напомню наш расчет:

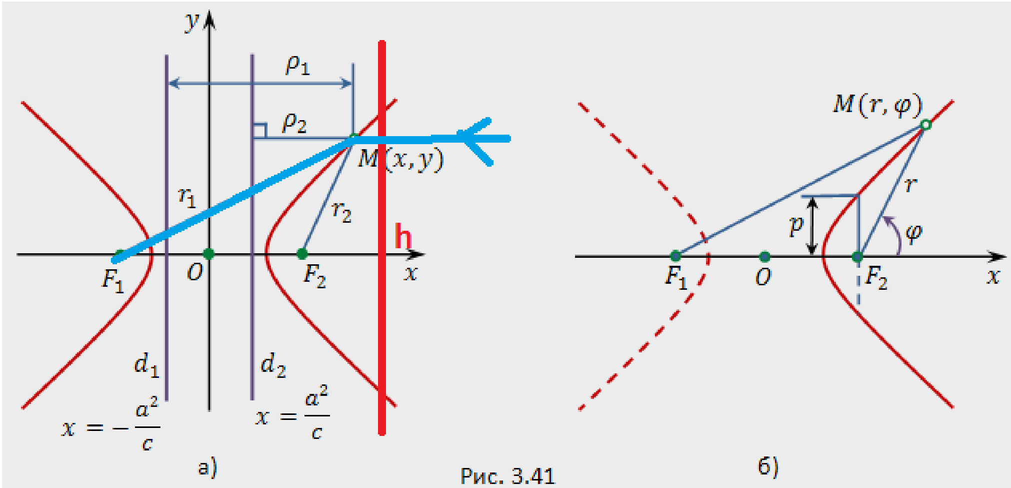


Рис. 3.41

Если луч затрачивает одинаковое время на прохождение линза+воздух до фокуса F1, то:

$$r_1 + \left(h + \frac{a^2}{c} - \rho_1\right)n = c + a + (h - a)n$$

Выражаем отсюда n, и поскольку

$$\frac{r_1}{\rho_1} = e$$

И c=ea

Получаем n=e.

Здесь нет никаких приближений и ограничений на значение y. Показатель преломления просто равен эксцентриситету при любых y. Расхождения в последних приведенных Вами расчетах, как я подозреваю, могли возникнуть из-за того, что в сложной формуле «набежала» итоговая погрешность вычислений. Ограничений на y накладываться не должно. Помните Ваш первоначальный расчет? Там все прекрасно сходилось при любых y. А то, странно получается: исходили из параметрической независимости от y и вдруг – только при малых y.