

$$v_p(t) := -\omega \cdot r \cdot \left[\sin(\omega \cdot t) + \frac{r \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t)}{2 \cdot l \cdot \sqrt{\frac{r^2 \cdot (\cos(\omega \cdot t)^2 - 1)}{l^2} + 1}} \right]$$

$$\int_{t1}^{t2} v_p(t) dt \rightarrow r \cdot \cos(\omega \cdot t2) - r \cdot \cos(\omega \cdot t1) + \int_{t1}^{t2} -\frac{\omega \cdot r^2 \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t)}{2 \cdot l \cdot \sqrt{\frac{r^2 \cdot (\cos(\omega \cdot t)^2 - 1)}{l^2} + 1}} dt$$

$$\int_{t1}^{t2} v_p(t) dt \text{ simplify} \rightarrow \frac{2 \cdot l \cdot r \cdot \cos(\omega \cdot t1) - 2 \cdot l \cdot r \cdot \cos(\omega \cdot t2) + \sqrt{2} \cdot \omega \cdot r^2 \cdot \int_{t1}^{t2} \frac{\sin(2 \cdot \omega \cdot t)}{\sqrt{\frac{2 \cdot l^2 - 2 \cdot r^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)^2}{l^2}}} dt}{2 \cdot l}$$

$$\int v_p(t) dt \text{ simplify} \rightarrow \frac{l \cdot \sqrt{4 - \frac{4 \cdot r^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)^2}{l^2}}}{2} + r \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$I(t) := \int v_p(t) dt \text{ simplify} \rightarrow I(t) \rightarrow \frac{l \cdot \sqrt{4 - \frac{4 \cdot r^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)^2}{l^2}}}{2} + r \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$I(t2) - I(t1) \rightarrow \frac{1 \cdot \sqrt{4 - \frac{4 \cdot r^2 \cdot \sin(\omega \cdot t2)^2}{l^2}}}{2} - \frac{1 \cdot \sqrt{4 - \frac{4 \cdot r^2 \cdot \sin(\omega \cdot t1)^2}{l^2}}}{2} - r \cdot \cos(\omega \cdot t1) + r \cdot \cos(\omega \cdot t2)$$

$$\int_{t1}^{t2} vp(t) dt \left| \begin{array}{l} \text{assume, } l > r \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow 2 \cdot r \cdot \cos\left(\frac{\omega \cdot t2}{2}\right)^2 - 2 \cdot r \cdot \cos\left(\frac{\omega \cdot t1}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 \cdot r^2 \cdot (\cos(\omega \cdot t1)^2 - 1) + 2 \cdot l^2}}{2} + \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 \cdot r^2 \cdot (\cos(\omega \cdot t2)^2 - 1) + 2 \cdot l^2}}{2}$$

$$\int_{t1}^{t2} vp(t) dt \left| \begin{array}{l} \text{assume, } l = r \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow 2 \cdot r \cdot \cos\left(\frac{\omega \cdot t2}{2}\right)^2 - 2 \cdot r \cdot \cos\left(\frac{\omega \cdot t1}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{\frac{1}{l^2} \cdot \sqrt{2 \cdot r^2 \cdot (\cos(\omega \cdot t1)^2 - 1) + 2 \cdot l^2}}}{2} + \frac{\sqrt{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{\frac{1}{l^2} \cdot \sqrt{2 \cdot r^2 \cdot (\cos(\omega \cdot t2)^2 - 1) + 2 \cdot l^2}}}{2}$$

$$\int_{t1}^{t2} vp(t) dt \left| \begin{array}{l} \text{assume, } l < r \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow 2 \cdot r \cdot \cos\left(\frac{\omega \cdot t2}{2}\right)^2 - 2 \cdot r \cdot \cos\left(\frac{\omega \cdot t1}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 \cdot r^2 \cdot (\cos(\omega \cdot t1)^2 - 1) + 2 \cdot l^2}}{2} + \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 \cdot r^2 \cdot (\cos(\omega \cdot t2)^2 - 1) + 2 \cdot l^2}}{2}$$

$$\int_{t1}^{t2} (vp(t))^3 dt \rightarrow \blacksquare$$