Pendel mit zwei Massen: $l_3 := 0$ **und** $m_3 := 0$

Aus der Lagrangeschen Gleichung vom System 3-fach Pendel abgeleitet:

$$L = \frac{1}{2} l_1^2 \cdot m_1 \cdot \varphi_1'(t)^2 + 2 \cdot l_1^2 \cdot m_2 \cdot \varphi_1'(t)^2 + \frac{1}{2} l_2^2 \cdot m_2 \cdot \varphi_2'(t)^2 - l_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos(\varphi_1(t)) - 2 \cdot l_1 \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos(\varphi_1(t)) - l_2 \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos(\varphi_2(t)) + 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \varphi_1'(t) \cdot \varphi_2'(t) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))$$

$$\frac{dL}{d\varphi_1'} = l_1^2 \cdot m_1 \cdot \varphi_1'(t) + 4 \cdot l_1^2 \cdot m_2 \cdot \varphi_1'(t) + 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \varphi_2'(t) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))$$

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{d\varphi_1'} = l_1^2 \ \varphi_1''(t) \ (m_1 + 4 \ m_2) + 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot (\varphi_2''(t) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) - \varphi_2'(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \cdot (\varphi_1'(t) - \varphi_2'(t)))$$

$$\frac{dL}{\varphi_1} = -l_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \sin(\varphi_1(t)) - 2 \cdot l_1 \cdot m_2 \cdot g \cdot \sin(\varphi_1(t)) - 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \varphi_1'(t) \cdot \varphi_2'(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))$$

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{d\varphi_1'} - \frac{dL}{\varphi_1} = 0$$

$$l_1^2 \ \varphi_1''(t) \ (m_1 + 4 \ m_2) + 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot (\varphi_2''(t) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) - \varphi_2'(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \cdot (\varphi_1'(t) - \varphi_2'(t))) + l_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \sin(\varphi_1(t)) + 2 \cdot l_1 \cdot m_2 \cdot g \cdot \sin(\varphi_1(t)) + 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \varphi_1'(t) \cdot \varphi_2'(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) = 0$$

$$\frac{dL}{d\varphi_2'} = l_2^2 \cdot m_2 \cdot \varphi_2'(t) + 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \varphi_1'(t) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))$$

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{d\varphi_2'} = l_2^2 \cdot m_2 \cdot \varphi_2''(t) + 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot (\varphi_1''(t) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) - \varphi_1'(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \cdot (\varphi_1'(t) - \varphi_2'(t)))$$

$$\frac{dL}{d\varphi_2} = -l_2 \cdot m_2 \cdot g \cdot \sin(\varphi_2(t)) + 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \varphi_1'(t) \cdot \varphi_2'(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))$$

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{d\varphi_2'} - \frac{dL}{d\varphi_2} = 0$$

$$l_2^2 \cdot m_2 \cdot \varphi_2''(t) + l_2 \cdot m_2 \cdot g \cdot \sin(\varphi_2(t)) + 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \varphi_1''(t) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) - 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \varphi_1'(t)^2 \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) = 0$$

Gekoppelte DGL:

$$l_1^2 \cdot \varphi_1''(t) \cdot (m_1 + 4 \cdot m_2) + l_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \sin(\varphi_1(t)) + 2 \cdot l_1 \cdot m_2 \cdot g \cdot \sin(\varphi_1(t)) + 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \varphi_2''(t) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) + 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \varphi_2'(t)^2 \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) = 0$$

$$l_2^2 \cdot m_2 \cdot \varphi_2''(t) + l_2 \cdot m_2 \cdot g \cdot \sin(\varphi_2(t)) + 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \varphi_1''(t) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) - 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \varphi_1'(t)^2 \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) = 0$$

$l_1 := 1\ m \quad l_2 := 2\ m \quad m_1 := 1\ kg \quad m_2 := 2\ kg \quad t_e := 120\ s \quad t := 0\ s, 0.01\ s .. t_e \quad t_{end} := t_e \cdot \frac{FRAME + 1}{300}$

Startwerte

$\varphi_1(0\ s) = 0\ ° \quad \varphi_1'(0\ s) = \frac{0\ °}{s} \quad \varphi_2(0\ s) = 45\ ° \quad \varphi_2'(0\ s) = \frac{0\ °}{s}$

Nebenbedingungen

$$l_1^2 \cdot \varphi_1''(t) \cdot (m_1 + 4 \cdot m_2) + 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \varphi_2''(t) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) - l_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \sin(\varphi_1(t)) - 2 \cdot l_1 \cdot m_2 \cdot g \cdot \sin(\varphi_1(t)) + 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \varphi_2'(t)^2 \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) = 0$$

$$\varphi_1''(t) \cdot \left(l_1 \cdot (l_2 \cdot m_1 + 4 \cdot l_2 \cdot m_2) - 4 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))^2\right) + 2 \cdot l_2^2 \cdot m_2 \cdot \varphi_2'(t)^2 \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) - l_2 \cdot m_1 \cdot g \cdot \sin(\varphi_1(t)) - 2 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot g \cdot \sin(\varphi_1(t)) + 2 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot g \cdot \sin(\varphi_2(t)) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) + 4 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \varphi_1'(t)^2 \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) = 0$$

Gleichungslöser

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} := \mathbf{odesolve}\left(\begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{bmatrix}, t_e\right)$$

$x_1(t) := l_1 \cdot \sin(\varphi_1(t)) \quad x_2(t) := x_1(t) + l_2 \cdot \sin(\varphi_2(t))$

$y_1(t) := l_1 \cdot \cos(\varphi_1(t)) \quad y_2(t) := y_1(t) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2(t))$

$l_1(t) := \sqrt{x_1(t)^2 + y_1(t)^2} \quad l_2(t) := \sqrt{(x_2(t) - x_1(t))^2 + (y_2(t) - y_1(t))^2}$

$v_1(t) := l_1'(t) \quad v_2(t) := l_2'(t)$

$a_1(t) := v_1'(t) \quad a_2(t) := v_2'(t) \quad t_{tt} := 0, \frac{t_{end}}{10000} .. t_{end}$

$FRAME \equiv 50$