

Herleitung des Systems der Differentialgleichungen für das 3-fach Pendel

created by: Volker Lehner

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 \cdot (x_1'^2 + y_1'^2) + \frac{1}{2} m_2 \cdot (x_2'^2 + y_2'^2) + \frac{1}{2} m_3 \cdot (x_3'^2 + y_3'^2)$$

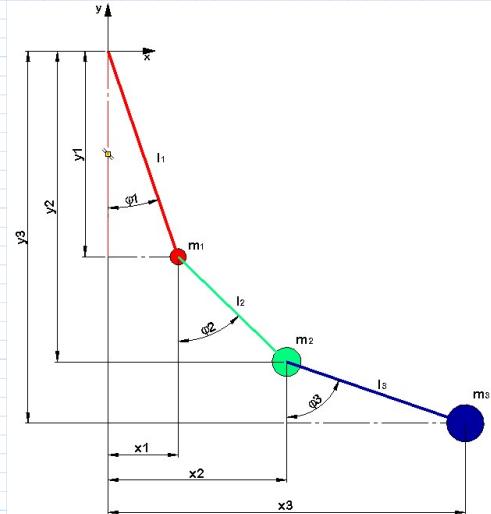
$$E_p = m_1 \cdot g \cdot y_1 + m_2 \cdot g \cdot y_2 + m_3 \cdot g \cdot y_3$$

$$x_1 = l_1 \cdot \sin(\varphi_1) \quad x_2 = x_1 + l_2 \cdot \sin(\varphi_2) = l_1 \cdot \sin(\varphi_1) + l_2 \cdot \sin(\varphi_2)$$

$$x_3 = x_2 + l_3 \cdot \sin(\varphi_3) = l_1 \cdot \sin(\varphi_1) + l_2 \cdot \sin(\varphi_2) + l_3 \cdot \sin(\varphi_3)$$

$$y_1 = -l_1 \cdot \cos(\varphi_1) \quad y_2 = y_1 - l_2 \cdot \cos(\varphi_2) = -l_1 \cdot \cos(\varphi_1) - l_2 \cdot \cos(\varphi_2)$$

$$y_3 = y_2 - l_3 \cdot \cos(\varphi_3) = -l_1 \cdot \cos(\varphi_1) - l_2 \cdot \cos(\varphi_2) - l_3 \cdot \cos(\varphi_3)$$



Zusammengefasste Koordinaten (generalisierte Koordinaten $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$):

$$x_1 = l_1 \cdot \sin(\varphi_1)$$

$$x_2 = l_1 \cdot \sin(\varphi_1) + l_2 \cdot \sin(\varphi_2)$$

$$x_3 = l_1 \cdot \sin(\varphi_1) + l_2 \cdot \sin(\varphi_2) + l_3 \cdot \sin(\varphi_3)$$

$$y_1 = -l_1 \cdot \cos(\varphi_1)$$

$$y_2 = -l_1 \cdot \cos(\varphi_1) - l_2 \cdot \cos(\varphi_2)$$

$$y_3 = -l_1 \cdot \cos(\varphi_1) - l_2 \cdot \cos(\varphi_2) - l_3 \cdot \cos(\varphi_3)$$

Die Geschwindigkeiten:

$$x_1' = l_1 \cdot \varphi_1' \cdot \cos(\varphi_1)$$

$$x_2' = l_1 \cdot \varphi_1' \cdot \cos(\varphi_1) + l_2 \cdot \varphi_2' \cdot \cos(\varphi_2)$$

$$x_3' = l_1 \cdot \varphi_1' \cdot \cos(\varphi_1) + l_2 \cdot \varphi_2' \cdot \cos(\varphi_2) + l_3 \cdot \varphi_3' \cdot \cos(\varphi_3)$$

$$y_1' = l_1 \cdot \varphi_1' \cdot \sin(\varphi_1)$$

$$y_2' = l_1 \cdot \varphi_1' \cdot \sin(\varphi_1) + l_2 \cdot \varphi_2' \cdot \sin(\varphi_2)$$

$$y_3' = l_1 \cdot \varphi_1' \cdot \sin(\varphi_1) + l_2 \cdot \varphi_2' \cdot \sin(\varphi_2) + l_3 \cdot \varphi_3' \cdot \sin(\varphi_3)$$

Eingesetzt in die Lagrangeschen Gleichungen (und vereinfacht) ergibt:

$$E_k = (l_1^2 \cdot \varphi_1'^2 + l_2^2 \cdot \varphi_2'^2 + l_3^2 \cdot \varphi_3'^2) \cdot \frac{m_3}{2} + \frac{m_2 \cdot (l_1^2 \cdot \varphi_1'^2 + l_2^2 \cdot \varphi_2'^2)}{2} + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \cdot \varphi_1'^2 + l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \varphi_1' \cdot \varphi_2' + l_1 \cdot l_2 \cdot m_3 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \varphi_1' \cdot \varphi_3' + l_1 \cdot l_3 \cdot m_3 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_3) \cdot \varphi_1' \cdot \varphi_3' + l_2 \cdot l_3 \cdot m_3 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \cdot \varphi_2' \cdot \varphi_3'$$

$$E_p = m_1 \cdot g \cdot y_1 + m_2 \cdot g \cdot (y_1 + y_2) + m_3 \cdot g \cdot (y_1 + y_2 + y_3)$$

$$E_p = -m_1 \cdot g \cdot l_1 \cdot \cos(\varphi_1) - m_2 \cdot g \cdot (l_1 \cdot \cos(\varphi_1) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2)) - m_3 \cdot g \cdot (l_1 \cdot \cos(\varphi_1) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2) + l_3 \cdot \cos(\varphi_3))$$

Somit ergibt sich als Lagrangesche Gleichung für das 3-fach Pendel:

$$L = E_k - E_p$$

$$L = (l_1^2 \cdot \varphi_1'(t)^2 + l_2^2 \cdot \varphi_2'(t)^2 + l_3^2 \cdot \varphi_3'(t)^2) \cdot \frac{m_3}{2} + \frac{m_2 \cdot (l_1^2 \cdot \varphi_1'(t)^2 + l_2^2 \cdot \varphi_2'(t)^2)}{2} + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \cdot \varphi_1'(t)^2 + l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \cdot \varphi_1'(t) \cdot \varphi_2'(t) + l_1 \cdot l_2 \cdot m_3 \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_3(t)) \cdot \varphi_1'(t) \cdot \varphi_3'(t) + l_1 \cdot l_3 \cdot m_3 \cdot \cos(\varphi_2(t) - \varphi_3(t)) \cdot \varphi_2'(t) \cdot \varphi_3'(t) + m_1 \cdot g \cdot l_1 \cdot \cos(\varphi_1(t)) + m_2 \cdot g \cdot (l_1 \cdot \cos(\varphi_1(t)) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2(t))) + m_3 \cdot g \cdot (l_1 \cdot \cos(\varphi_1(t)) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2(t)) + l_3 \cdot \cos(\varphi_3(t)))$$

Die Ableitungen: φ_1 -Koordinate

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\varphi_1'} &= \left(\frac{d}{dt} \varphi_1(t) \right) \cdot l_1^2 \cdot m_1 + \left(\frac{d}{dt} \varphi_1(t) \right) \cdot l_1^2 \cdot m_2 + \left(\frac{d}{dt} \varphi_1(t) \right) \cdot l_1^2 \cdot m_3 + l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_2(t) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \\ &\quad + l_1 \cdot l_2 \cdot m_3 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_2(t) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) + l_1 \cdot l_3 \cdot m_3 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_3(t) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_3(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\varphi_1} &= -(l_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \sin(\varphi_1(t))) - l_1 \cdot m_2 \cdot g \cdot \sin(\varphi_1(t)) - l_1 \cdot m_3 \cdot g \cdot \sin(\varphi_1(t)) - l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_1(t) \cdot \frac{d}{dt} \varphi_2(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \\ &\quad - l_1 \cdot l_2 \cdot m_3 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_1(t) \cdot \frac{d}{dt} \varphi_3(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_3(t)) - l_1 \cdot l_3 \cdot m_3 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_1(t) \cdot \frac{d}{dt} \varphi_3(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_3(t)) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{d\varphi_1'} = l_1^2 \cdot m_1 \cdot \frac{d^2}{dt^2} \varphi_1(t) + l_1^2 \cdot m_2 \cdot \frac{d^2}{dt^2} \varphi_1(t) + l_1^2 \cdot m_3 \cdot \frac{d^2}{dt^2} \varphi_1(t) +$$

$$- l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \left(2 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_2(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \varphi_1(t) - \frac{d}{dt} \varphi_2(t) \right) + \left(\frac{d^2}{dt^2} \varphi_2(t) \right) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) + \varphi_2(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \cdot \left(\frac{d^2}{dt^2} \varphi_1(t) - \frac{d^2}{dt^2} \varphi_2(t) \right) \right)$$

$$+ \varphi_2(t) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \varphi_1(t) - \frac{d}{dt} \varphi_2(t) \right)^2 \right)$$

$$- l_1 \cdot l_2 \cdot m_3 \cdot \left(2 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_2(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \varphi_1(t) - \frac{d}{dt} \varphi_2(t) \right) - \left(\frac{d^2}{dt^2} \varphi_2(t) \right) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \right)$$

$$+ \varphi_2(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \cdot \left(\frac{d^2}{dt^2} \varphi_1(t) - \frac{d^2}{dt^2} \varphi_2(t) \right) + \varphi_2(t) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \varphi_1(t) - \frac{d}{dt} \varphi_2(t) \right)^2 \right)$$

$$- l_1 \cdot l_3 \cdot m_3 \cdot \left(2 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_3(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_3(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \varphi_1(t) - \frac{d}{dt} \varphi_3(t) \right) - \left(\frac{d^2}{dt^2} \varphi_3(t) \right) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_3(t)) \right)$$

$$+ \varphi_3(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_3(t)) \cdot \left(\frac{d^2}{dt^2} \varphi_1(t) - \frac{d^2}{dt^2} \varphi_3(t) \right) + \varphi_3(t) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_3(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \varphi_1(t) - \frac{d}{dt} \varphi_3(t) \right)^2 \right)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{d\varphi_1'} - \frac{dL}{d\varphi_1} = 0$$

Erste Differentialgleichung für die φ_1 Koordinate:

$$l_1^2 \cdot m_1 \cdot \frac{d^2}{dt^2} \varphi_1(t) + l_1^2 \cdot m_2 \cdot \frac{d^2}{dt^2} \varphi_1(t) + l_1^2 \cdot m_3 \cdot \frac{d^2}{dt^2} \varphi_1(t) = 0$$

$$- l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \left(2 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_2(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \varphi_1(t) - \frac{d}{dt} \varphi_2(t) \right) + \left(\frac{d^2}{dt^2} \varphi_2(t) \right) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) + \varphi_2(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \cdot \left(\frac{d^2}{dt^2} \varphi_1(t) - \frac{d^2}{dt^2} \varphi_2(t) \right) \right)$$

$$+ \varphi_2(t) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \varphi_1(t) - \frac{d}{dt} \varphi_2(t) \right)^2 \right)$$

$$- l_1 \cdot l_2 \cdot m_3 \cdot \left(2 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_2(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \varphi_1(t) - \frac{d}{dt} \varphi_2(t) \right) - \left(\frac{d^2}{dt^2} \varphi_2(t) \right) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \right)$$

$$+ \varphi_2(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \cdot \left(\frac{d^2}{dt^2} \varphi_1(t) - \frac{d^2}{dt^2} \varphi_2(t) \right) + \varphi_2(t) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \varphi_1(t) - \frac{d}{dt} \varphi_2(t) \right)^2 \right)$$

$$- l_1 \cdot l_3 \cdot m_3 \cdot \left(2 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_3(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_3(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \varphi_1(t) - \frac{d}{dt} \varphi_3(t) \right) - \left(\frac{d^2}{dt^2} \varphi_3(t) \right) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_3(t)) \right)$$

$$+ \varphi_3(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_3(t)) \cdot \left(\frac{d^2}{dt^2} \varphi_1(t) - \frac{d^2}{dt^2} \varphi_3(t) \right) + \varphi_3(t) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_3(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \varphi_1(t) - \frac{d}{dt} \varphi_3(t) \right)^2 \right)$$

$$- \left(-l_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \sin(\varphi_1(t)) - l_1 \cdot m_2 \cdot g \cdot \sin(\varphi_1(t)) - l_1 \cdot m_3 \cdot g \cdot \sin(\varphi_1(t)) - l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_1(t) \cdot \frac{d}{dt} \varphi_2(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \right.$$

$$\left. - l_1 \cdot l_2 \cdot m_3 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_1(t) \cdot \frac{d}{dt} \varphi_2(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) - l_1 \cdot l_3 \cdot m_3 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_1(t) \cdot \frac{d}{dt} \varphi_3(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_3(t)) \right)$$

Die Ableitungen: φ_2 -Koordinate

$$\frac{dL}{d\varphi_2'} = \left(\frac{d}{dt} \varphi_2(t) \right) \cdot l_2^2 \cdot m_2 + \left(\frac{d}{dt} \varphi_2(t) \right) \cdot l_2^2 \cdot m_3 + l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_1(t) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) + l_1 \cdot l_2 \cdot m_3 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_1(t) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))$$

$$+ l_2 \cdot l_3 \cdot m_3 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_3(t) \cdot \cos(\varphi_2(t) - \varphi_3(t))$$

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{d\varphi_2'} = l_2^2 \cdot m_2 \cdot \frac{d^2}{dt^2} \varphi_2(t) + l_2^2 \cdot m_3 \cdot \frac{d^2}{dt^2} \varphi_2(t) - l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \left(2 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_1(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \varphi_1(t) - \frac{d}{dt} \varphi_2(t) \right) \right) \downarrow \\ - \left(\frac{d^2}{dt^2} \varphi_1(t) \right) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \downarrow \\ + \varphi_1(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \cdot \left(\frac{d^2}{dt^2} \varphi_1(t) - \frac{d^2}{dt^2} \varphi_2(t) \right) \downarrow \\ + \varphi_1(t) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \varphi_1(t) - \frac{d}{dt} \varphi_2(t) \right) \right)^2 \right) \\ - l_1 \cdot l_2 \cdot m_3 \cdot \left(2 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_1(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \varphi_1(t) - \frac{d}{dt} \varphi_2(t) \right) - \left(\frac{d^2}{dt^2} \varphi_1(t) \right) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \right) \downarrow \\ + \varphi_1(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \cdot \left(\frac{d^2}{dt^2} \varphi_1(t) - \frac{d^2}{dt^2} \varphi_2(t) \right) + \varphi_1(t) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \varphi_1(t) - \frac{d}{dt} \varphi_2(t) \right) \right)^2 \right) \\ - l_2 \cdot l_3 \cdot m_3 \cdot \left(2 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_3(t) \cdot \sin(\varphi_2(t) - \varphi_3(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \varphi_2(t) - \frac{d}{dt} \varphi_3(t) \right) - \left(\frac{d^2}{dt^2} \varphi_3(t) \right) \cdot \cos(\varphi_2(t) - \varphi_3(t)) \right) \downarrow \\ + \varphi_3(t) \cdot \sin(\varphi_2(t) - \varphi_3(t)) \cdot \left(\frac{d^2}{dt^2} \varphi_2(t) - \frac{d^2}{dt^2} \varphi_3(t) \right) + \varphi_3(t) \cdot \cos(\varphi_2(t) - \varphi_3(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \varphi_2(t) - \frac{d}{dt} \varphi_3(t) \right) \right)^2 \right)$$

$$\frac{dL}{d\varphi_2} = l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_1(t) \cdot \frac{d}{dt} \varphi_2(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) - l_2 \cdot m_3 \cdot g \cdot \sin(\varphi_2(t)) - l_2 \cdot m_2 \cdot g \cdot \sin(\varphi_2(t)) + l_1 \cdot l_2 \cdot m_3 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_1(t) \cdot \frac{d}{dt} \varphi_2(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) - l_2 \cdot l_3 \cdot m_3 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_2(t) \cdot \frac{d}{dt} \varphi_3(t) \cdot \sin(\varphi_2(t) - \varphi_3(t))$$

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{d\varphi_2'} - \frac{dL}{d\varphi_2} = 0$$

Zweite Differentialgleichung für die φ_2 -Koordinate:

$$\begin{aligned}
& l_2^2 \cdot m_2 \cdot \frac{d^2}{dt^2} \varphi_2(t) + l_2^2 \cdot m_3 \cdot \frac{d^2}{dt^2} \varphi_2(t) - l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \left(2 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_1(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \varphi_1(t) - \frac{d}{dt} \varphi_2(t) \right) \right. \\
& \quad \left. - \left(\frac{d^2}{dt^2} \varphi_1(t) \right) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \right. \\
& \quad \left. + \varphi_1(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \cdot \left(\frac{d^2}{dt^2} \varphi_1(t) - \frac{d^2}{dt^2} \varphi_2(t) \right) \right. \\
& \quad \left. + \varphi_1(t) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \varphi_1(t) - \frac{d}{dt} \varphi_2(t) \right) \right)^2 \\
& - l_1 \cdot l_2 \cdot m_3 \cdot \left(2 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_1(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \varphi_1(t) - \frac{d}{dt} \varphi_2(t) \right) - \left(\frac{d^2}{dt^2} \varphi_1(t) \right) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \right. \\
& \quad \left. + \varphi_1(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \cdot \left(\frac{d^2}{dt^2} \varphi_1(t) - \frac{d^2}{dt^2} \varphi_2(t) \right) + \varphi_1(t) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \varphi_1(t) - \frac{d}{dt} \varphi_2(t) \right) \right)^2 \\
& - l_2 \cdot l_3 \cdot m_3 \cdot \left(2 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_3(t) \cdot \sin(\varphi_2(t) - \varphi_3(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \varphi_2(t) - \frac{d}{dt} \varphi_3(t) \right) - \left(\frac{d^2}{dt^2} \varphi_3(t) \right) \cdot \cos(\varphi_2(t) - \varphi_3(t)) \right. \\
& \quad \left. + \varphi_3(t) \cdot \sin(\varphi_2(t) - \varphi_3(t)) \cdot \left(\frac{d^2}{dt^2} \varphi_2(t) - \frac{d^2}{dt^2} \varphi_3(t) \right) + \varphi_3(t) \cdot \cos(\varphi_2(t) - \varphi_3(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \varphi_2(t) - \frac{d}{dt} \varphi_3(t) \right) \right)^2 \\
& - \left(l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_1(t) \cdot \frac{d}{dt} \varphi_2(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) - l_2 \cdot m_3 \cdot \textcolor{blue}{g} \cdot \sin(\varphi_2(t)) - l_2 \cdot m_2 \cdot \textcolor{blue}{g} \cdot \sin(\varphi_2(t)) \right. \\
& \quad \left. + l_1 \cdot l_2 \cdot m_3 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_1(t) \cdot \frac{d}{dt} \varphi_2(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) - l_2 \cdot l_3 \cdot m_3 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_2(t) \cdot \frac{d}{dt} \varphi_3(t) \cdot \sin(\varphi_2(t) - \varphi_3(t)) \right)
\end{aligned}$$

Die Ableitungen: φ_3 -Koordinate

$$\frac{dL}{d\varphi_3'} = \varphi_3'(t) \cdot l_3^2 \cdot m_3 + l_1 \cdot l_3 \cdot m_3 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_1(t) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_3(t)) + l_2 \cdot l_3 \cdot m_3 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_2(t) \cdot \cos(\varphi_2(t) - \varphi_3(t))$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{dL}{d\varphi_3'} &= l_3^2 \cdot m_3 \cdot \frac{d^2}{dt^2} \varphi_3(t) - l_1 \cdot l_3 \cdot m_3 \cdot \left(2 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_1(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_3(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \varphi_1(t) - \frac{d}{dt} \varphi_3(t) \right) - \left(\frac{d^2}{dt^2} \varphi_1(t) \right) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_3(t)) \right. \\ &\quad \left. + \varphi_1(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_3(t)) \cdot \left(\frac{d^2}{dt^2} \varphi_1(t) - \frac{d^2}{dt^2} \varphi_3(t) \right) \right. \\ &\quad \left. + \varphi_1(t) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_3(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \varphi_1(t) - \frac{d}{dt} \varphi_3(t) \right)^2 \right) \\ &\quad - l_2 \cdot l_3 \cdot m_3 \cdot \left(2 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_2(t) \cdot \sin(\varphi_2(t) - \varphi_3(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \varphi_2(t) - \frac{d}{dt} \varphi_3(t) \right) - \left(\frac{d^2}{dt^2} \varphi_2(t) \right) \cdot \cos(\varphi_2(t) - \varphi_3(t)) \right. \\ &\quad \left. + \varphi_2(t) \cdot \sin(\varphi_2(t) - \varphi_3(t)) \cdot \left(\frac{d^2}{dt^2} \varphi_2(t) - \frac{d^2}{dt^2} \varphi_3(t) \right) + \varphi_2(t) \cdot \cos(\varphi_2(t) - \varphi_3(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \varphi_2(t) - \frac{d}{dt} \varphi_3(t) \right)^2 \right) \end{aligned}$$

$$\frac{dL}{d\varphi_3} = l_1 \cdot l_3 \cdot m_3 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_1(t) \cdot \frac{d}{dt} \varphi_3(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_3(t)) - l_3 \cdot m_3 \cdot g \cdot \sin(\varphi_3(t)) + l_2 \cdot l_3 \cdot m_3 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_2(t) \cdot \frac{d}{dt} \varphi_3(t) \cdot \sin(\varphi_2(t) - \varphi_3(t))$$

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{d\varphi_3} - \frac{dL}{d\varphi_3'} = 0$$

Dritte Differentialgleichung für die φ_3 Koordinate:

$$\begin{aligned} l_3^2 \cdot m_3 \cdot \frac{d^2}{dt^2} \varphi_3(t) - l_1 \cdot l_3 \cdot m_3 \cdot \left(2 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_1(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_3(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \varphi_1(t) - \frac{d}{dt} \varphi_3(t) \right) - \left(\frac{d^2}{dt^2} \varphi_1(t) \right) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_3(t)) \right. \\ &\quad \left. + \varphi_1(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_3(t)) \cdot \left(\frac{d^2}{dt^2} \varphi_1(t) - \frac{d^2}{dt^2} \varphi_3(t) \right) \right. \\ &\quad \left. + \varphi_1(t) \cdot \cos(\varphi_1(t) - \varphi_3(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \varphi_1(t) - \frac{d}{dt} \varphi_3(t) \right)^2 \right) \\ - l_2 \cdot l_3 \cdot m_3 \cdot \left(2 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_2(t) \cdot \sin(\varphi_2(t) - \varphi_3(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \varphi_2(t) - \frac{d}{dt} \varphi_3(t) \right) - \left(\frac{d^2}{dt^2} \varphi_2(t) \right) \cdot \cos(\varphi_2(t) - \varphi_3(t)) \right. \\ &\quad \left. + \varphi_2(t) \cdot \sin(\varphi_2(t) - \varphi_3(t)) \cdot \left(\frac{d^2}{dt^2} \varphi_2(t) - \frac{d^2}{dt^2} \varphi_3(t) \right) + \varphi_2(t) \cdot \cos(\varphi_2(t) - \varphi_3(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \varphi_2(t) - \frac{d}{dt} \varphi_3(t) \right)^2 \right) \\ - \left(l_1 \cdot l_3 \cdot m_3 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_1(t) \cdot \frac{d}{dt} \varphi_3(t) \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_3(t)) - l_3 \cdot m_3 \cdot g \cdot \sin(\varphi_3(t)) + l_2 \cdot l_3 \cdot m_3 \cdot \frac{d}{dt} \varphi_2(t) \cdot \frac{d}{dt} \varphi_3(t) \cdot \sin(\varphi_2(t) - \varphi_3(t)) \right) \end{aligned} = 0$$