

Eine punktförmige Masse wird am oberen Ende eines Parabelbogens aus der Ruhe losgelassen.  
 Wie sieht der Verlauf für Beschleunigung und Geschwindigkeit aus?  
 Die Bewegung erfolgt mit Reibung und Luftwiderstand.

$$y(x) = \lambda \cdot x^2 \quad \text{Parabelbahn}$$

Ableitungen:

$$\frac{d}{dx} y(x) = 2 \lambda \cdot x \quad \frac{d^2}{dx^2} y(x) = 2 \lambda$$

$$y'(t) = 2 \lambda \cdot x(t) \cdot x'(t)$$

Es ist:  $\varphi = \text{atan}(2 \lambda \cdot x)$

$$F_r = (F_n + F_z) \cdot \mu \quad F_n = m_k \cdot g \cdot \cos(\text{atan}(2 \lambda \cdot x))$$

$$F_n = \frac{m_k \cdot g}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}}$$

$$F_h = m_k \cdot g \cdot \frac{2 \cdot x \cdot \lambda}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}}$$

$$F_z = m_k \cdot \frac{v^2}{r} \quad v^2 = x'^2 + y'^2 \quad \text{Zentrifugalkraft an der Ortskrümmung}$$

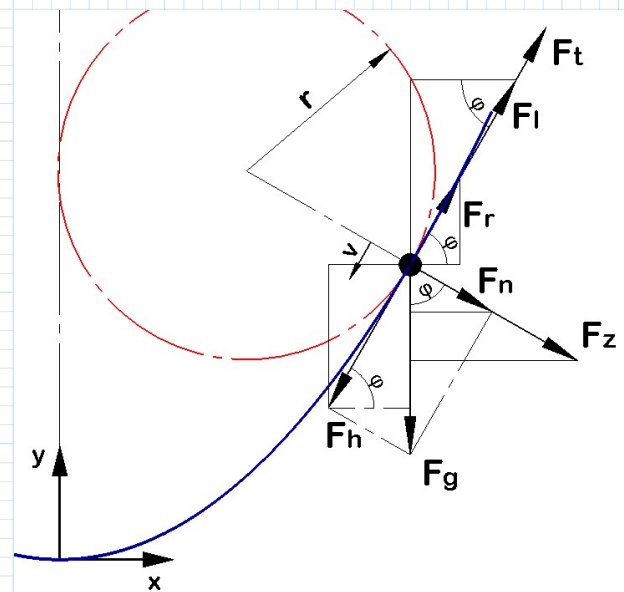
$$v^2 = x'^2 + 4 \lambda^2 \cdot x^2 \cdot x'^2 \quad \text{resultierende Geschwindigkeit (=Bahngeschwindigkeit)}$$

$$r = \frac{\sqrt{(4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1)^3}}{2 \lambda} \quad \text{Ortskrümmungsradius}$$

$$F_z = 2 \lambda \cdot m_k \cdot \frac{x'^2 + 4 \lambda^2 \cdot x^2 \cdot x'^2}{\sqrt{(1 + (2 \lambda \cdot x)^2)^3}}$$

$$F_l = k \cdot v^2 \quad F_l = k \cdot (x'^2 + 4 \lambda^2 \cdot x^2 \cdot x'^2) \quad k = \frac{1}{2} \cdot \delta_l \cdot c_w \cdot A_k \quad \text{Luftwiderstand}$$

$$F_r = \mu \cdot m_k \cdot \left( \frac{g}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}} + 2 \lambda \cdot \frac{x'^2 + 4 \lambda^2 \cdot x^2 \cdot x'^2}{\sqrt{(4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1)^3}} \right) \quad \text{gesamte resultierende Widerstandskraft ( } F_r + F_l \text{ )}$$



$$\sum F = 0 \quad \text{dynamisches Gleichgewicht der Kräfte}$$

Erstellen des DGL-Systems:

$$-F_{hx} + F_{rx} + F_{lx} + F_{tx} = 0 \quad \text{x-Richtung} \quad -F_{hy} + F_{ry} + F_{ly} + F_{ty} = 0 \quad \text{y-Richtung}$$

$$\text{Es sind: } \varphi = \text{atan}(2 \lambda \cdot x) \quad \sin(\varphi) = \frac{2 \cdot x \cdot \lambda}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}} \quad \cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}}$$

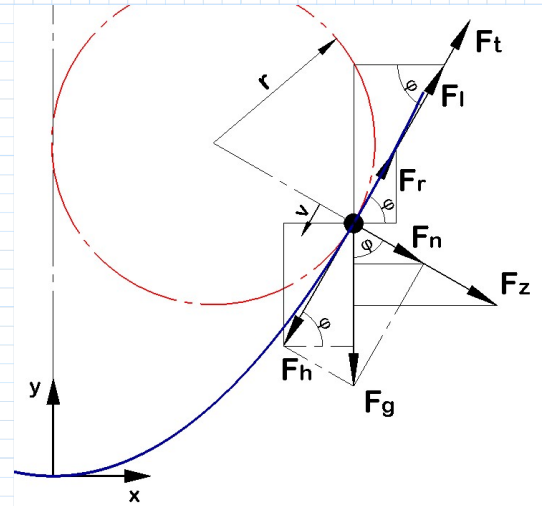
DGL für die x-Komponente:

$$-F_{hx} + F_{rx} + F_{lx} + F_{tx} = 0$$

$$F_{hx} = m_k \cdot g \cdot \frac{2 \cdot x \cdot \lambda}{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}$$

$$F_{rx} = \mu \cdot m_k \cdot \left( \frac{g}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}} + 2 \lambda \cdot \frac{x'^2 + 4 \lambda^2 \cdot x^2 \cdot x'^2}{\sqrt{((4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1))^3}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}}$$

$$F_{lx} = k \cdot x'^2 \quad F_{tx} = m_k \cdot x''$$



Komponenten der Kräfte eingesetzt und vereinfacht:

$$x''(t) - g \cdot \frac{2 \cdot x(t) \cdot \lambda}{1 + 4 \lambda^2 \cdot x(t)^2} + \mu \cdot \left( \frac{g}{\sqrt{(1 + 4 \lambda^2 \cdot x(t)^2)^3}} + \frac{2 \lambda \cdot x'(t)^2}{\sqrt{(1 + 4 \lambda^2 \cdot x(t)^2)^5}} \right) + \frac{k}{m_k} \cdot x'(t)^2 = 0$$

DGL für die y-Komponente:

$$-F_{hy} + F_{ry} + F_{ly} + F_{ty} = 0$$

$$F_{hy} = m_k \cdot g \cdot \frac{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2}{1 + 4 \lambda^2 \cdot x^2} \quad F_{ry} = 2 \lambda \cdot x \cdot \mu \cdot m_k \cdot \left( \frac{g}{1 + 4 \lambda^2 \cdot x^2} + \frac{2 \lambda \cdot x'^2}{\sqrt{(4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1)^5}} \right)$$

$$F_{ly} = k \cdot y'^2 \quad y' = 2 \lambda \cdot x \cdot x' \quad F_{ly} = 4 \lambda^2 \cdot k \cdot x^2 \cdot x'^2 \quad F_{ty} = m_k \cdot y''$$

Komponenten der Kräfte eingesetzt und vereinfacht:

$$y''(t) - g \cdot \frac{4 \cdot x(t)^2 \cdot \lambda^2}{1 + 4 \lambda^2 \cdot x(t)^2} + 2 \lambda \cdot x(t) \cdot \mu \cdot \left( \frac{g}{1 + 4 \lambda^2 \cdot x(t)^2} + \frac{2 \lambda \cdot x'(t)^2}{\sqrt{(1 + 4 \lambda^2 \cdot x(t)^2)^5}} \right) + \frac{k}{m_k} \cdot 4 \lambda^2 \cdot x(t)^2 \cdot x'(t)^2 = 0$$

**Parameter und Konstanten:**

$$\lambda := 2 \cdot 0.03064734 \frac{1}{\text{m}} \quad m_k := 1 \text{ kg} \quad \delta_l := 1.29 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \quad c_w := 1.2 \quad d := 1 \text{ cm} \quad A_k := \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \quad k := \frac{1}{2} \cdot \delta_l \cdot c_w \cdot A_k$$

$$x_0 := 50 \text{ m} \quad t_e := 5 \text{ s} \quad \mu := 0.12 \quad y_0 := \lambda \cdot x_0^2 = 153.24 \text{ m}$$

$$x(0 \text{ s}) = x_0 \quad x'(0 \text{ s}) = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad y(0 \text{ s}) = y_0 \quad y'(0 \text{ s}) = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

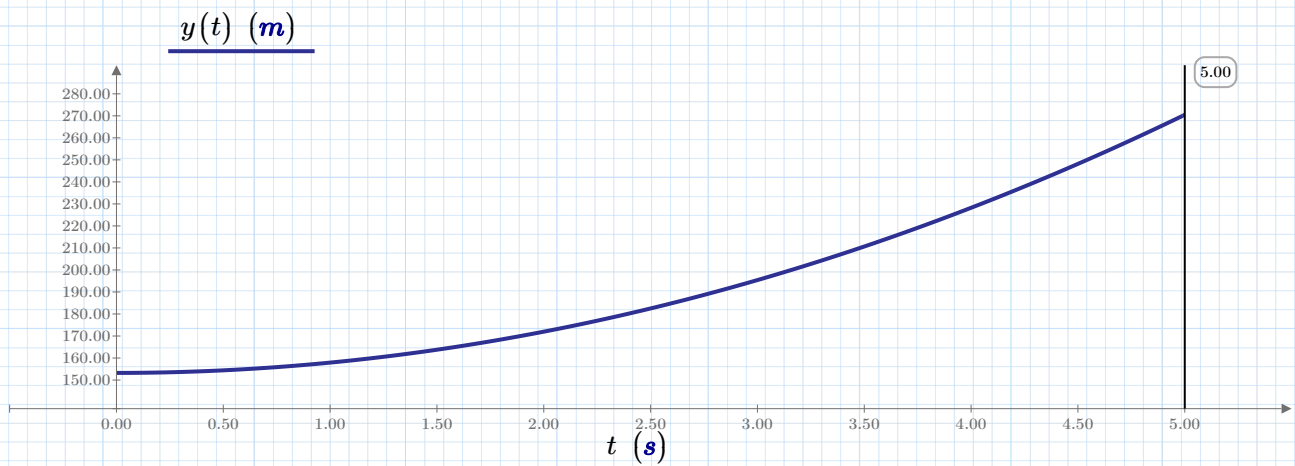
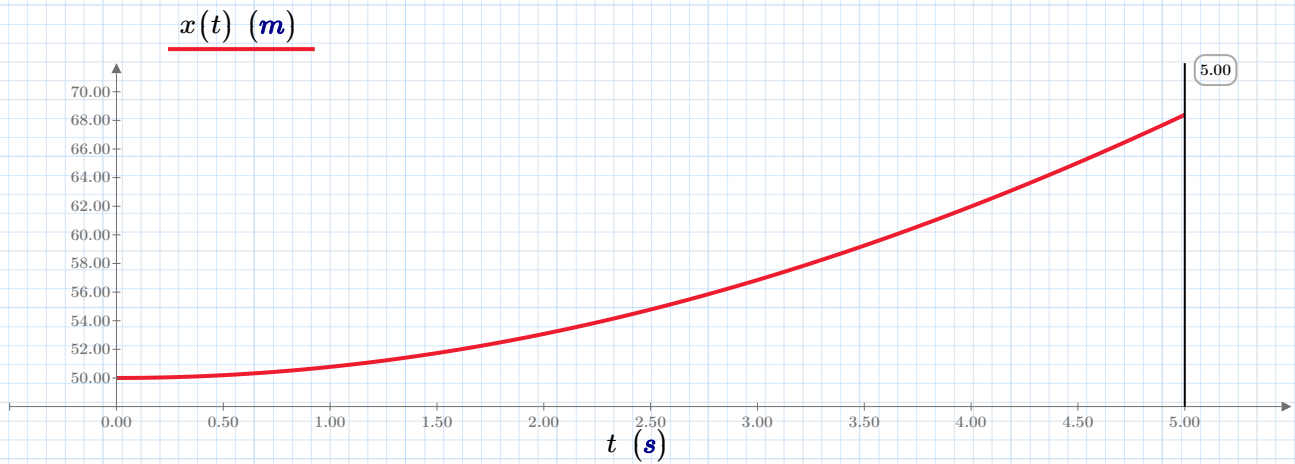
$$x''(t) - g \cdot \frac{2 \cdot x(t) \cdot \lambda}{1 + 4 \lambda^2 \cdot x(t)^2} + \mu \cdot \left( \frac{g}{\sqrt{(1 + 4 \lambda^2 \cdot x(t)^2)^3}} + \frac{2 \lambda \cdot x'(t)^2}{\sqrt{(1 + 4 \lambda^2 \cdot x(t)^2)^5}} \right) + \frac{k}{m_k} \cdot x'(t)^2 = 0$$

$$y''(t) - g \cdot \frac{4 \cdot x(t)^2 \cdot \lambda^2}{1 + 4 \lambda^2 \cdot x(t)^2} + 2 \lambda \cdot x(t) \cdot \mu \cdot \left( \frac{g}{\sqrt{(1 + 4 \lambda^2 \cdot x(t)^2)^3}} + \frac{2 \lambda \cdot x'(t)^2}{\sqrt{(1 + 4 \lambda^2 \cdot x(t)^2)^5}} \right) + \frac{k}{m_k} \cdot y'(t)^2 = 0$$

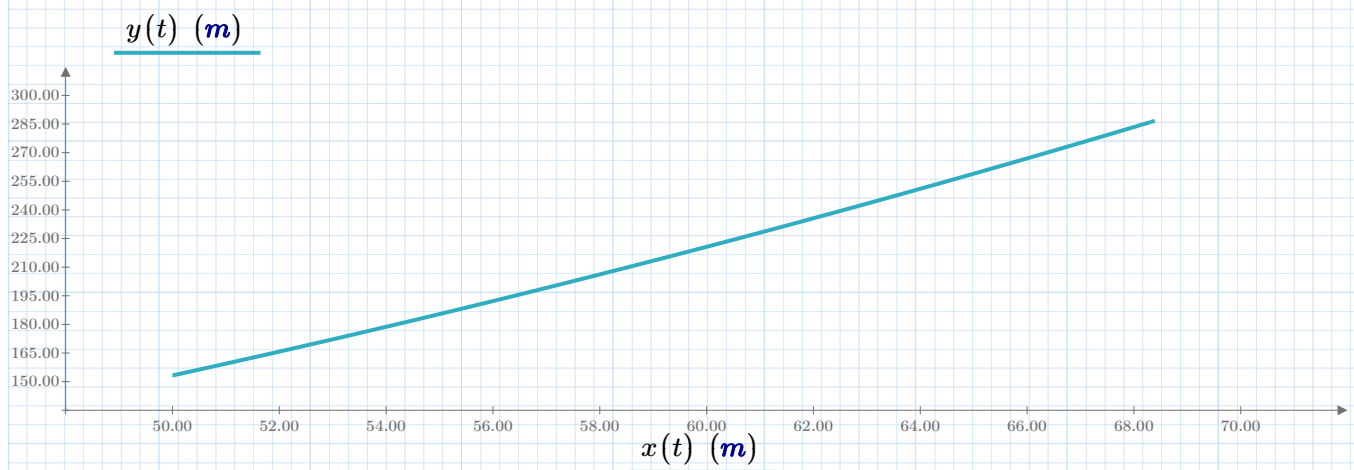
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} := \text{odesolve} \left( \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, t_e \right)$$

$t := 0 \text{ s}, 0.01 \text{ s}.. t_e$

**Diagramm für die Koordinaten**



$$y(t) := \lambda \cdot x(t)^2$$





Wann erreicht der Körper den Scheitelpunkt der Parabel?

Gleichungslösungswegwert

$$t := 1 \text{ s}$$

$$y(t) = 0 \text{ m}$$

$$t_s := \text{find}(t) = ?$$

Nach  $t_s = ?$  ist der Körper am tiefsten Punkt angelangt.