

Eine punktförmige Masse wird am oberen Ende eines Parabelbogens aus der Ruhe losgelassen.  
 Wie sieht der Verlauf für Beschleunigung und Geschwindigkeit aus?  
 Die Bewegung erfolgt mit Reibung und Luftwiderstand.

$$y(x) = \lambda \cdot x^2 \quad \text{Parabelbahn}$$

Ableitungen:

$$\frac{d}{dx}y(x) = 2 \lambda \cdot x \quad \frac{d^2}{dx^2}y(x) = 2 \lambda$$

$$y'(t) = 2 \lambda \cdot x \cdot x' \quad y''(t) = 2 \lambda \cdot (x'^2 + x'' \cdot x)$$

Es ist:  $\varphi = \text{atan}(2 \lambda \cdot x)$

$$F_r = (F_n + F_z) \cdot \mu \quad F_n = m_k \cdot g \cdot \cos(\text{atan}(2 \lambda \cdot x))$$

$$F_n = \frac{m_k \cdot g}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}}$$

$$F_z = m_k \cdot \frac{v^2}{r} \quad v^2 = x'^2 + y'^2 \quad \text{Zentrifugalkraft an der Ortskrümmung}$$

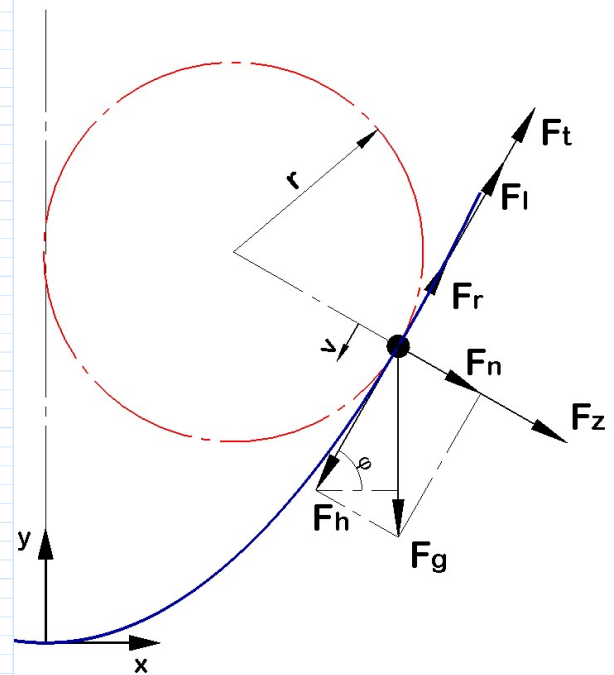
$$v^2 = x'^2 + 4 \lambda^2 \cdot x^2 \cdot x'^2 \quad \text{resultierende Geschwindigkeit (=Bahngeschwindigkeit)}$$

$$r = \frac{\sqrt{(4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1)^3}}{2 \lambda} \quad \text{Ortskrümmungsradius}$$

$$F_z = 2 \lambda \cdot m_k \cdot \frac{x'^2 + 4 \lambda^2 \cdot x^2 \cdot x'^2}{\sqrt{(1 + (2 \lambda \cdot x)^2)^3}}$$

$$F_l = k \cdot v^2 \quad F_l = k \cdot (x'^2 + 4 \lambda^2 \cdot x^2 \cdot x'^2) \quad k = \frac{1}{2} \cdot \delta_l \cdot c_w \cdot A_k \quad \text{Luftwiderstand}$$

$$F_r = \mu \cdot m_k \cdot \left( \frac{g}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}} + 2 \lambda \cdot \frac{x'^2 + 4 \lambda^2 \cdot x^2 \cdot x'^2}{\sqrt{((4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1)^2)^3}} \right) \quad \text{gesamte resultierende Widerstandskraft ( } F_r + F_l \text{ )}$$



Suchen der Lösung mit Hilfe des Lagrangeschen Formalismus für die x- und y- Richtung:

$$y(x) = \lambda \cdot x^2 \quad \text{Parabelbahn}$$

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m_k \cdot v^2 \quad v = \sqrt{x'^2 + y'^2} \quad E_k = \frac{1}{2} \cdot m_k \cdot (x'^2 + y'^2)$$

$$E_p = m_k \cdot g \cdot y = \lambda \cdot m_k \cdot g \cdot x^2$$

Lagrangesche Formulierung der dissipativen Kräfte (Luftwiderstand und Reibung):

Reibung:

$$P_r = \int_0^v h_r(v) dv \quad h_r(v) = \mu \cdot (F_n + F_z) \quad F_n = \frac{m_k \cdot g}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}} \quad F_z = 2 \lambda \cdot m_k \cdot \frac{v^2}{\sqrt{(4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1)^3}}$$

$$h_r(v) = \mu \cdot m_k \cdot \left( \frac{g}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}} + 2 \lambda \cdot \frac{v^2}{\sqrt{(4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1)^3}} \right)$$

$$P_r = \mu \cdot m_k \cdot \int_0^v \left( \frac{g}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}} + 2 \lambda \cdot \frac{v^2}{\sqrt{(4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1)^3}} \right) dv$$

$$P_r = \mu \cdot m_k \cdot \left( \frac{g \cdot v}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}} + \frac{2}{3} \cdot \lambda \cdot \frac{v^3}{\sqrt{(4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1)^3}} \right)$$

$$P_r = \mu \cdot m_k \cdot \left( \frac{g \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}} + \frac{2}{3} \cdot \lambda \cdot \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}^3}{\sqrt{(4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1)^3}} \right)$$

Luftwiderstand:

$$P_l = \int_0^v h_l(v) dv \quad h_l(v) = k \cdot v^2 \quad P_l = k \cdot \int_0^v v^2 dv \quad P_l = \frac{k}{3} \cdot v^3 \quad P_l = \frac{k}{3} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}^3$$

Somit ergibt sich für die gesamten dissipativen Kräfte folgendes:

$$P = P_r + P_l$$

$$P = \mu \cdot m_k \cdot \left( \frac{g \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}} + \frac{2}{3} \cdot \lambda \cdot \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}^3}{\sqrt{(4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1)^3}} \right) + \frac{k}{3} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}^3$$

Allgemeine Lagrangesche Gleichung für die x und- y Koordinate:

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{dx'} - \frac{dL}{dx} + \frac{dP}{dx'} = 0$$

x-Koordinate

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{dy'} - \frac{dL}{dy} + \frac{dP}{dy'} = 0$$

y-Koordinate

x-Koordinate:

$$L = E_k - E_p \quad L = \frac{1}{2} \cdot m_k \cdot (x'^2 + y'^2) - \lambda \cdot m_k \cdot g \cdot x^2$$

$$\frac{dL}{dx'} = m_k \cdot x' \quad \frac{d}{dt} \frac{dL}{dx'} = m_k \cdot x'' \quad \frac{dL}{dx} = -2 \lambda \cdot m_k \cdot g \cdot x$$

$$\frac{dP}{dx'} = x' \cdot k \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2} + \mu \cdot m_k \cdot \left( \frac{x' \cdot g}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}} + \frac{2 \cdot x' \cdot \lambda \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}{\sqrt{(4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1)^3}} \right)$$

$$x''(t) + 2 \lambda \cdot g \cdot x(t) + x'(t)^2 \cdot \frac{k}{m_k} \cdot \sqrt{1 + 4 \lambda^2 \cdot x(t)^2} + \mu \cdot \frac{g + 2 \cdot x'(t)^2 \cdot \lambda}{1 + 4 \lambda^2 \cdot x(t)^2} = 0$$

y-Koordinate:

$$L = E_k - E_p \quad L = \frac{1}{2} \cdot m_k \cdot (x'^2 + y'^2) - m_k \cdot g \cdot y$$

$$\frac{dL}{dy'} = m_k \cdot y' \quad \frac{d}{dt} \frac{dL}{dy'} = m_k \cdot y'' \quad \frac{dL}{dy} = -m_k \cdot g$$

$$\frac{dP}{dy'} = y' \cdot k \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2} + \mu \cdot m_k \cdot \left( \frac{y' \cdot g}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}} + \frac{2 \cdot y' \cdot \lambda \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}{\sqrt{(4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1)^3}} \right)$$

$$y'' + g + 2 \lambda \cdot x \cdot x'^2 \cdot \frac{k}{m_k} \cdot \sqrt{4 x^2 \lambda^2 + 1} + 2 \lambda \cdot x \cdot \mu \cdot \left( \frac{g + 2 \lambda x'^2}{4 x^2 \lambda^2 + 1} \right) = 0$$

$$\lambda := 2 \cdot 0.03064734 \frac{1}{m} \quad m_k := 1 \text{ kg} \quad \delta_l := 1.29 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \quad c_w := 1.2 \quad d := 1 \text{ cm} \quad A_k := \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \quad k := \frac{1}{2} \cdot \delta_l \cdot c_w \cdot A_k$$

$$x_0 := 50 \text{ m} \quad t_e := 5 \text{ s} \quad \mu := 0.12 \quad y_0 := \lambda \cdot x_0^2 = 153.24 \text{ m}$$

$$x(0 \text{ s}) = x_0 \quad x'(0 \text{ s}) = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad y(0 \text{ s}) = y_0 \quad y'(0 \text{ s}) = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Vereinfachte Gleichungen:

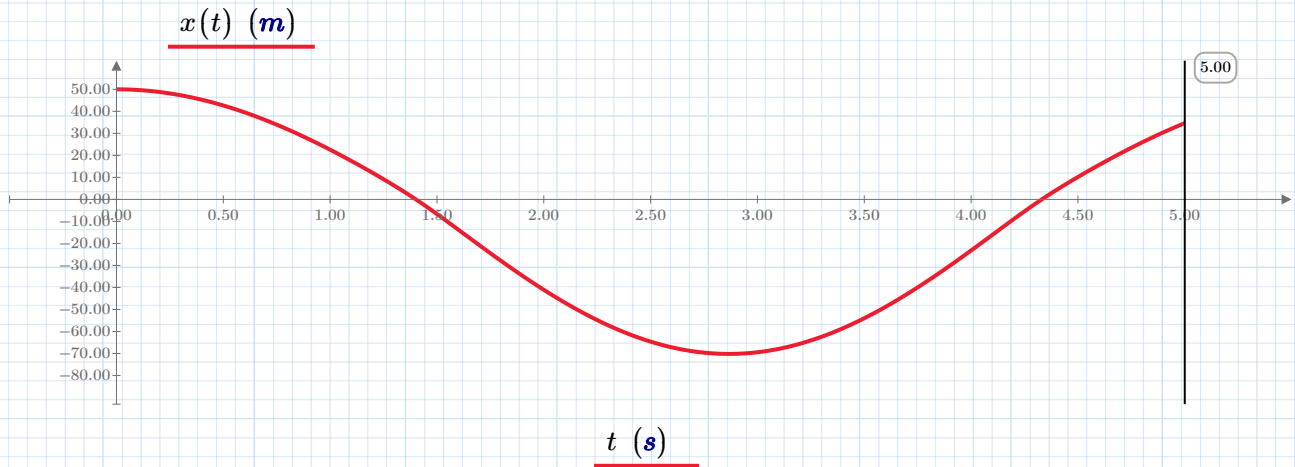
$$x''(t) + 2 \lambda \cdot g \cdot x(t) + x'(t)^2 \cdot \frac{k}{m_k} \cdot \sqrt{1 + 4 \lambda^2 \cdot x(t)^2} + \mu \cdot \frac{g + 2 \cdot x'(t)^2 \cdot \lambda}{1 + 4 \lambda^2 \cdot x(t)^2} = 0$$

$$y''(t) + g + 2 \lambda \cdot x(t) \cdot x'(t)^2 \cdot \frac{k}{m_k} \cdot \sqrt{4 x(t)^2 \lambda^2 + 1} + 2 \lambda \cdot x(t) \cdot \mu \cdot \frac{g + 2 \lambda x'(t)^2}{4 x(t)^2 \lambda^2 + 1} = 0$$

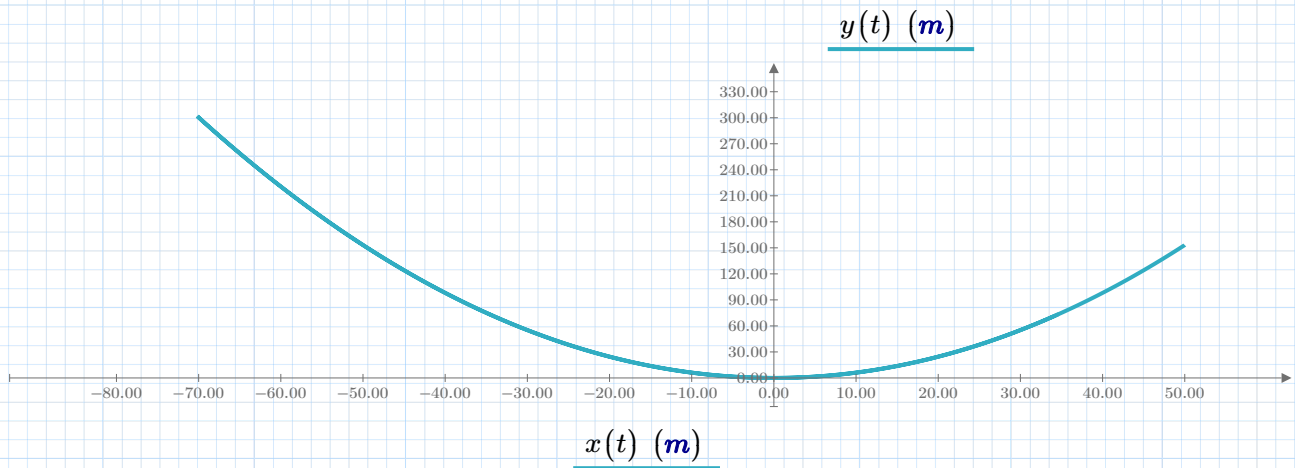
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} := \text{odesolve} \left( \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, t_e \right)$$

$t := 0 \text{ s}, 0.01 \text{ s} \dots t_e$

### Diagramm für die Koordinaten



$$y(t) := \lambda \cdot x(t)^2$$



Wann erreicht der Körper den Scheitelpunkt der Parabel?

Gleichungslösungswert

$$t := 1 \text{ s}$$

$$y(t) = 0 \text{ m}$$

$$t_s := \text{find}(t) = 1.40 \text{ s}$$

Nach  $t_s = 1.40 \text{ s}$  ist der Körper am tiefsten Punkt angelangt.