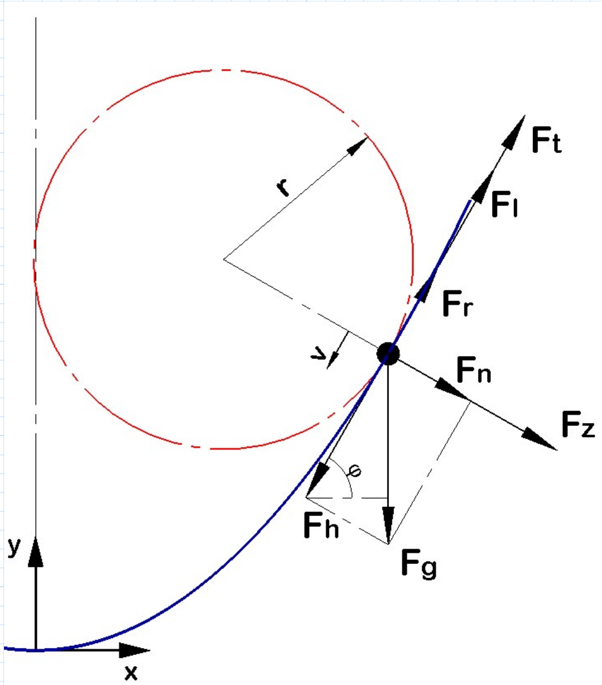
Eine punktförmige Masse wird am oberen Ende eines Parabelbogens aus der Ruhe losgelassen.
Wie sieht der Verlauf für Beschleunigung und Geschwindigkeit aus?
Die Bewegung erfolgt mit Reibung und Luftwiderstand.

$y(x) = \lambda \cdot x^2$ **Parabelbahn**



Ableitungen:

$$\frac{d}{dx} y(x) = 2\,\lambda \cdot x \qquad \frac{d^2}{dx^2} y(x) = 2\,\lambda$$

$$y'(t) = 2\,\lambda \cdot x \cdot x' \qquad y''(t) = 2\,\lambda \cdot \left(x'^2 + x'' \cdot x\right)$$

Es ist: $\varphi = \operatorname{atan}(2\,\lambda \cdot x)$

$$F_r = \left(F_n + F_z\right) \cdot \mu \qquad F_n = m_k \cdot g \cdot \cos\left(\operatorname{atan}(2\,\lambda \cdot x)\right)$$

$$F_n = \frac{m_k \cdot g}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}}$$

$$F_z = m_k \cdot \frac{v^2}{r} \qquad v^2 = x'^2 + y'^2$$ **Zentrifugalkraft an der Ortskrümmung**

$$v^2 = x'^2 + 4\,\lambda^2 \cdot x^2 \cdot x'^2$$ **resultierende Geschwindigkeit (=Bahngeschwindigkeit)**

$$r = \frac{\sqrt{\left(4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1\right)^3}}{2\,\lambda}$$ **Ortskrümmungsradius**

$$F_z = 2\,\lambda \cdot m_k \cdot \frac{x'^2 + 4\,\lambda^2 \cdot x^2 \cdot x'^2}{\sqrt{\left(1 + (2\,\lambda \cdot x)^2\right)^3}}$$

$$F_l = k \cdot v^2 \qquad F_l = k \cdot \left(x'^2 + 4\,\lambda^2 \cdot x^2 \cdot x'^2\right) \qquad k = \frac{1}{2} \cdot \delta_l \cdot c_w \cdot A_k$$ **Luftwiderstand**

$$F_r = \mu \cdot m_k \cdot \left(\frac{g}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}} + 2\,\lambda \cdot \frac{x'^2 + 4\,\lambda^2 \cdot x^2 \cdot x'^2}{\sqrt{\left(\left(4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1\right)^2\right)^3}}\right)$$

gesamte resultierende Widerstandskraft ($F_r + F_l$)

Suchen der Lösung mit Hilfe des Lagrangeschen Formalismus für die x- und y- Richtung:

$y(x) = \lambda \cdot x^2$ **Parabelbahn**

Abrollen der Kugel auf der Bahn:

$E_k = \frac{1}{2} \cdot m_k \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \varphi'^2$ $\quad v = x' \cdot \sqrt{1+4\,\lambda^2 \cdot x^2}$ $\quad \varphi' = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{1}{r}$ $\quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+4\,\lambda^2 \cdot x^2}$

$\frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \sqrt{1+4\,\lambda^2 \cdot x^2}$ $\quad \varphi' = \frac{1}{r} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \sqrt{1+4\,\lambda^2 \cdot x^2}$ $\quad \varphi' = \frac{x'}{r} \cdot \sqrt{1+4\,\lambda^2 \cdot x^2}$

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m_k \cdot x'^2 \cdot \left(1+4\,\lambda^2 \cdot x^2\right) + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \frac{x'^2}{r^2} \cdot \left(1+4\,\lambda^2 \cdot x^2\right)$$

$E_p = m_k \cdot g \cdot y = \lambda \cdot m_k \cdot g \cdot x^2$ $\quad L = E_k - E_p$

$$L = \frac{1}{2}\, x'(t)^2 \cdot \left(1+4\,\lambda^2 \cdot x(t)^2\right) \cdot \left(m_k + \frac{J}{r^2}\right) - \lambda \cdot m_k \cdot g \cdot x(t)^2$$

Lagrangesche Formulierung der dissipativen Kräfte(Luftwiderstand und Reibung):

Reibung:

$P_r = \int_0^v h_r(v)\,\mathrm{d}v$ $\quad h_r(v) = \mu \cdot \left(F_n + F_z\right)$ $\quad F_n = \frac{m_k \cdot g}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}}$ $\quad F_z = 2\,\lambda \cdot m_k \cdot \frac{v^2}{\sqrt{\left(4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1\right)^3}}$

$$h_r(v) = \mu \cdot m_k \cdot \left(\frac{g}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}} + 2\,\lambda \cdot \frac{v^2}{\sqrt{\left(4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1\right)^3}}\right)$$

$$P_r = \mu \cdot m_k \cdot \int_0^v \left(\frac{g}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}} + 2\,\lambda \cdot \frac{v^2}{\sqrt{\left(4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1\right)^3}}\right) \mathrm{d}v$$

$$P_r = \mu \cdot m_k \cdot \left(\frac{g \cdot v}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}} + \frac{2}{3} \cdot \lambda \cdot \frac{v^3}{\sqrt{\left(4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1\right)^3}}\right)$$

$$P_r = \mu \cdot m_k \cdot \left(\frac{g \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}} + \frac{2}{3} \cdot \lambda \cdot \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}^{\,3}}{\sqrt{\left(4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1\right)^3}}\right)$$

Luftwiderstand:

$P_l = \int_0^v h_l(v)\,\mathrm{d}v$ $\quad h_l(v) = k \cdot v^2$ $\quad P_l = k \cdot \int_0^v v^2\,\mathrm{d}v$ $\quad P_l = \frac{k}{3} \cdot v^3$ $\quad P_l = \frac{k}{3} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}^{\,3}$

Somit ergibt sich für die gesamten dissipativen Kräfte folgendes:

$P = P_r + P_l$

$$P = \mu \cdot m_k \cdot \left(\frac{g \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}} + \frac{2}{3} \cdot \lambda \cdot \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}^{\,3}}{\sqrt{\left(4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1\right)^3}}\right) + \frac{k}{3} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}^{\,3}$$

Allgemeine Lagrangesche Gleichung für die x und- y Koordinate:

$$\frac{d}{dt}\frac{dL}{dx'}-\frac{dL}{dx}+\frac{dP}{dx'}=0$$ **x-Koordinate**

x-Koordinate:

$$L=E_k-E_p \qquad L=\frac{1}{2}x'(t)^2\cdot\left(1+4\,\lambda^2\cdot x(t)^2\right)\cdot\left(m_k+\frac{J}{r^2}\right)-\lambda\cdot m_k\cdot g\cdot x(t)^2$$

$$\frac{dL}{dx'}=x'(t)\cdot\left(1+4\,\lambda^2\cdot x(t)^2\right)\cdot\left(m_k+\frac{J}{r^2}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{dL}{dx'}=x''(t)\cdot\left(4\cdot\lambda^2\cdot x(t)^2+1\right)\cdot\left(m_k+\frac{J}{r^2}\right)+8\cdot\lambda^2\cdot x(t)\cdot x'(t)^2\cdot\left(m_k+\frac{J}{r^2}\right)$$

$$\frac{dL}{dx}=\frac{1}{2}x'(t)^2\cdot 8\,\lambda^2\cdot x(t)\cdot\left(m_k+\frac{J}{r^2}\right)-2\,\lambda\cdot m_k\cdot g\cdot x(t)$$

$$\frac{dP}{dx'}=k\cdot x'(t)^2\cdot\sqrt{1+4\,\lambda^2\cdot x(t)^2}+\mu\cdot m_k\cdot\frac{g+2\cdot\lambda\cdot x'(t)^2}{1+4\,\lambda^2\cdot x(t)^2}$$

$$x''(t)\cdot\left(4\cdot\lambda^2\cdot x(t)^2+1\right)\cdot\left(m_k+\frac{J}{r^2}\right)+8\cdot\lambda^2\cdot x(t)\cdot x'(t)^2 \qquad =0$$
$$\cdot\left(m_k+\frac{J}{r^2}\right)\left(\frac{1}{2}x'(t)^2\cdot 8\,\lambda^2\cdot x(t)\cdot\left(m_k+\frac{J}{r^2}\right)-2\,\lambda\cdot m_k\cdot g\cdot x(t)\right)k\cdot x'(t)^2\cdot\sqrt{1+4\,\lambda^2\cdot x(t)^2}\;\mu\cdot m_k\cdot\frac{g+2\cdot\lambda\cdot x'(t)^2}{1+4\,\lambda^2\cdot x(t)^2}$$

$\lambda:=2\cdot 0.03064734\,\frac{1}{m}$ $\quad m_k:=0.5\,kg$ $\quad \delta_l:=1.29\,kg\cdot m^{-3}$ $\quad c_w:=1.25$ $\quad d:=10\,cm$ $\quad A_k:=\frac{\pi}{4}\cdot d^2$ $\quad k:=\frac{1}{2}\cdot\delta_l\cdot c_w\cdot A_k$ $\quad r:=\frac{d}{2}$

$x_0:=50\,m$ $\quad t_e:=50\,s$ $\quad \mu:=0.25$ $\quad y_0:=\lambda\cdot x_0{}^2=153.24\,m$ $\quad J:=\frac{2}{5}\,m_k\cdot r^2$

$x(0\,s)=x_0$ $\qquad x'(0\,s)=0\,\frac{m}{s}$

$$x''(t)\cdot\left(4\cdot\lambda^2\cdot x(t)^2+1\right)\cdot\left(m_k+\frac{J}{r^2}\right)+8\cdot\lambda^2\cdot x(t)\cdot x'(t)^2\cdot\left(m_k+\frac{J}{r^2}\right)-\left(\frac{1}{2}x'(t)^2\cdot 8\lambda^2\cdot x(t)\cdot\left(m_k+\frac{J}{r^2}\right)-2\lambda\cdot m_k\cdot g\cdot x(t)\right)+k\cdot x'(t)^2\cdot\sqrt{1+4\lambda^2\cdot x(t)^2}+\mu\cdot m_k\cdot\frac{g+2\cdot\lambda\cdot x'(t)^2}{1+4\lambda^2\cdot x(t)^2}=0$$

$$x:=\text{odesolve}\left(x(t),t_e\right)$$

$$y(t):=\lambda\cdot x(t)^2$$

$$L(t):=\frac{1}{2}x'(t)^2\cdot\left(1+4\,\lambda^2\cdot x(t)^2\right)\cdot\left(m_k+\frac{J}{r^2}\right)-\lambda\cdot m_k\cdot g\cdot x(t)^2$$

$$P(t):=\mu\cdot m_k\cdot x'(t)\cdot\left(\frac{3\,g+2\cdot\lambda\cdot x'(t)^2\cdot\left(1+4\,\lambda^2\cdot x(t)^2\right)}{3\sqrt{1+4\,\lambda^2\cdot x(t)^2}}\right)+\frac{k}{3}\cdot x'(t)^3\cdot\left(\left(1+4\,\lambda^2\cdot x(t)^2\right)\right)^3$$

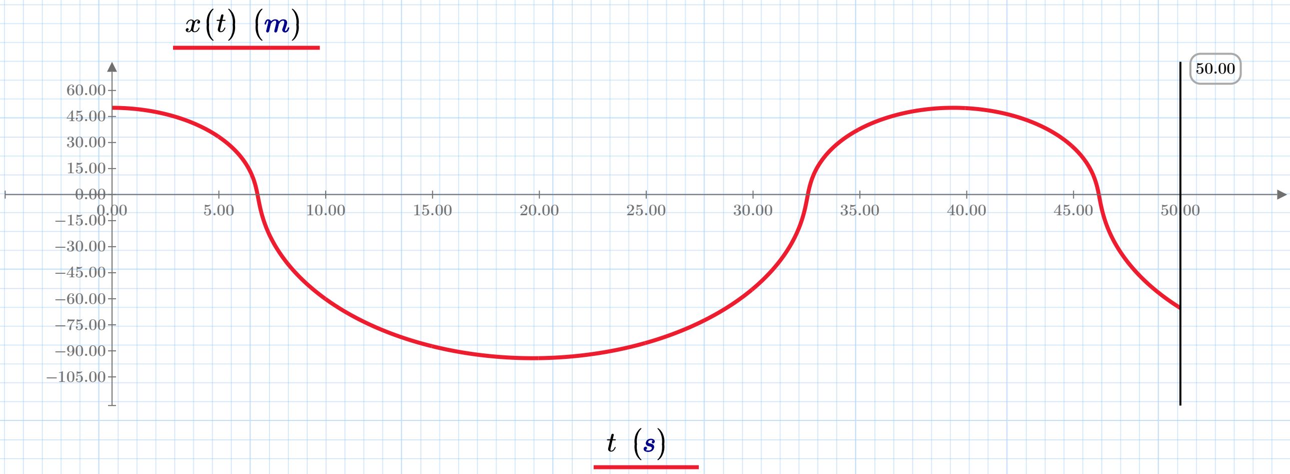
$$E_k(t):=\frac{1}{2}\cdot m_k\cdot x'(t)^2\cdot\left(1+4\,\lambda^2\cdot x(t)^2\right)+\frac{1}{2}\cdot J\cdot\frac{x'(t)^2}{r^2}\cdot\left(1+4\,\lambda^2\cdot x(t)^2\right)$$

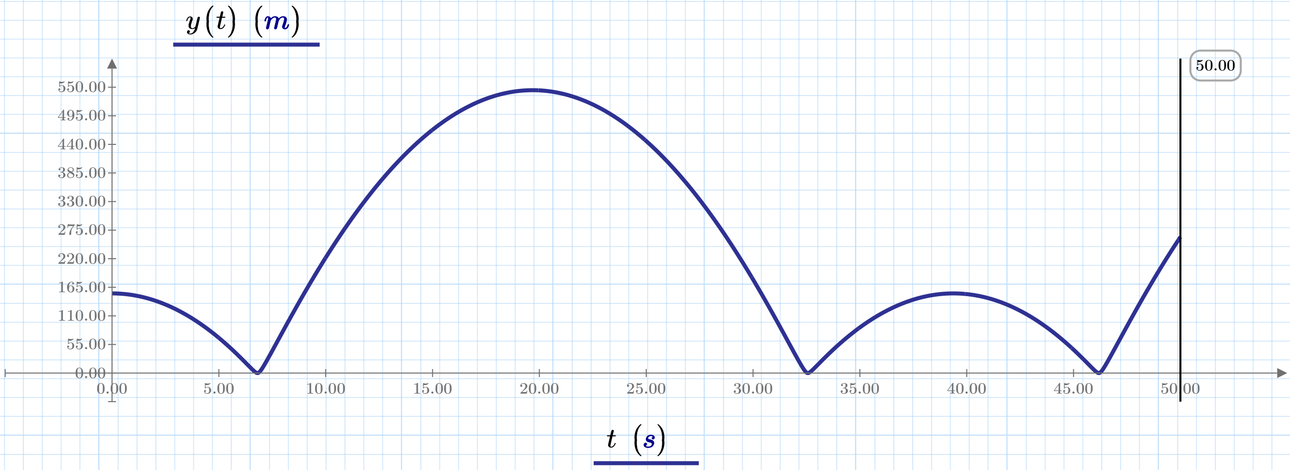
$$E_p(t):=\lambda\cdot m_k\cdot g\cdot x(t)^2$$

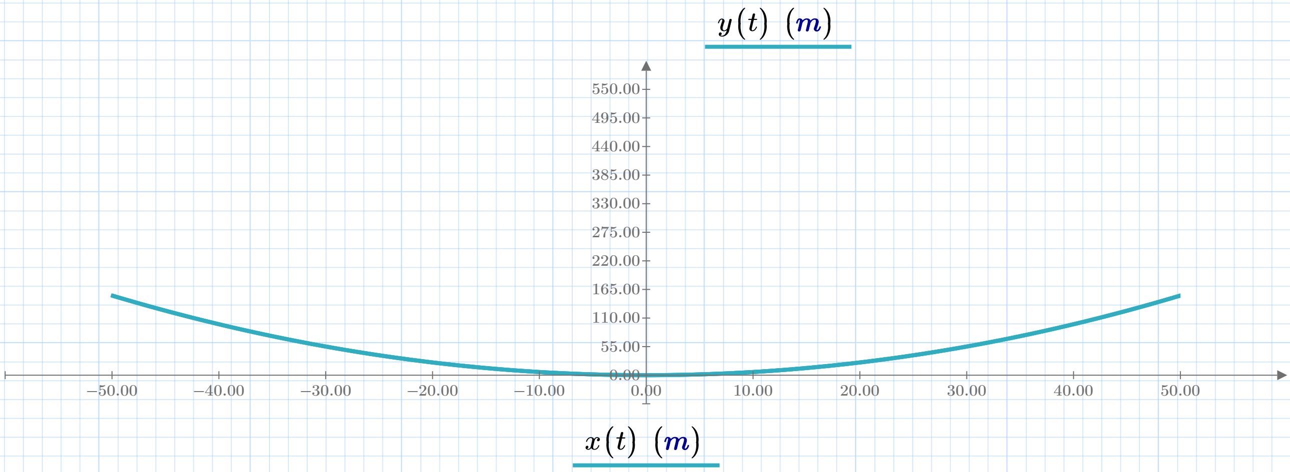
$$L(t):=E_k(t)-E_p(t)$$

$t := 0\ s, 0.01\ s .. t_e$

Diagramm für die Koordinaten







Wann erreicht der Körper den Scheitelpunkt der Parabel?

Schätzwerte

$t := 1\ s$

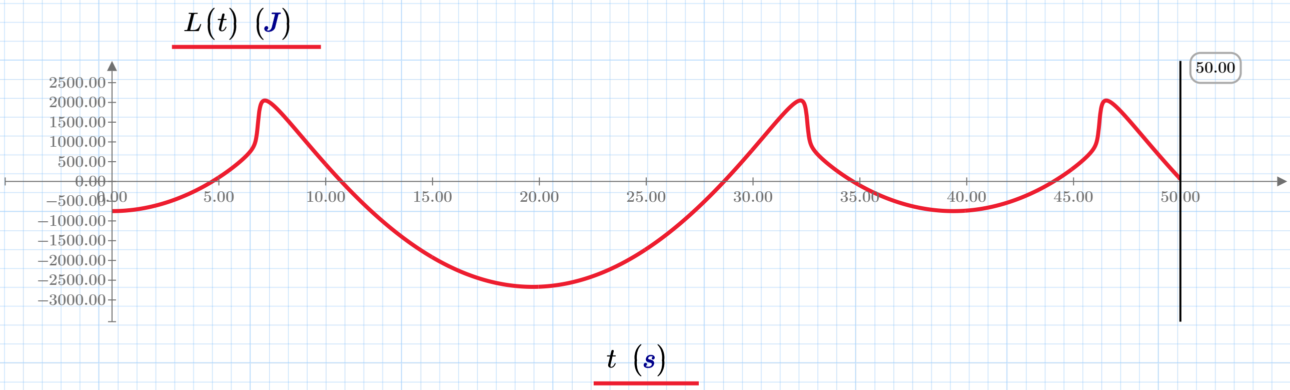
Nebenbedingungen

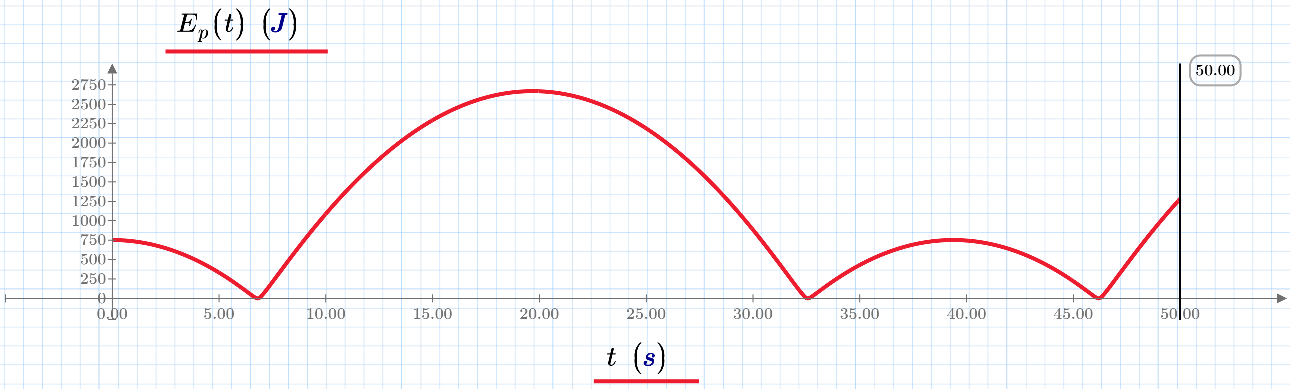
$y(t) = 0\ m$

Gleichungslöser

$t_s := \text{find}(t) = 6.81\ s$

Nach $t_s = 6.81\ s$ **ist der Körper am tiefsten Punkt angelangt.**





Verlauf der Bahngeschwindigkeit und der Bahnbeschleunigung:

$$v(t) := x'(t) \cdot \sqrt{1 + 4\,\lambda^2 \cdot x(t)^2} \qquad a(t) := \frac{x''(t) \cdot \left(1 + 4\,\lambda^2 \cdot x(t)^2\right) + 4\,\lambda^2 \cdot x(t) \cdot x'(t)^2}{\sqrt{1 + 4\,\lambda^2 \cdot x(t)^2}}$$