

Ein Körper der Masse m_k wird am oberen Ende eines Parabelbogens aus der Ruhe losgelassen.
 Wie sieht der Verlauf für Beschleunigung und Geschwindigkeit aus?
 Die Bewegung erfolgt mit Reibung und Luftwiderstand.

$y(x) = \lambda \cdot x^2$ **Parabelbahn**

Ableitungen:

$$\frac{d}{dx} y(x) = 2 \lambda \cdot x \qquad \frac{d^2}{dx^2} y(x) = 2 \lambda$$

$$y'(t) = 2 \lambda \cdot x \cdot x' \qquad y''(t) = 2 \lambda \cdot (x'^2 + x'' \cdot x)$$

Es ist: $\varphi = \text{atan}(2 \lambda \cdot x)$

$$F_r = (F_n + F_z) \cdot \mu \qquad F_n = m_k \cdot g \cdot \cos(\text{atan}(2 \lambda \cdot x))$$

$$F_n = \frac{m_k \cdot g}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}}$$

$$F_z = m_k \cdot \frac{v^2}{r} \qquad v^2 = x'^2 + y'^2 \qquad \text{Zentrifugalkraft an der Ortskrümmung}$$

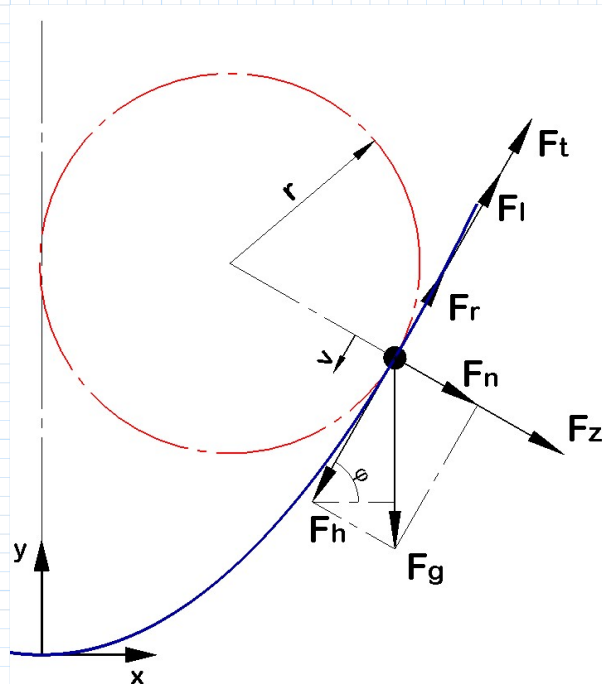
$$v^2 = x'^2 + 4 \lambda^2 \cdot x^2 \cdot x'^2 \qquad \text{resultierende Geschwindigkeit (=Bahngeschwindigkeit)}$$

$$\rho = \frac{\sqrt{(4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1)^3}}{2 \lambda} \qquad \text{Ortskrümmungsradius}$$

$$F_z = 2 \lambda \cdot m_k \cdot \frac{x'^2 + 4 \lambda^2 \cdot x^2 \cdot x'^2}{\sqrt{(1 + (2 \lambda \cdot x)^2)^3}}$$

$$F_l = k \cdot v^2 \qquad F_l = k \cdot (x'^2 + 4 \lambda^2 \cdot x^2 \cdot x'^2) \qquad k = \frac{1}{2} \cdot \delta_l \cdot c_w \cdot A_k \qquad \text{Luftwiderstand}$$

$$F_r = \mu \cdot m_k \cdot \left(\frac{g}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}} + 2 \lambda \cdot \frac{x'^2 + 4 \lambda^2 \cdot x^2 \cdot x'^2}{\sqrt{(4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1)^3}} \right) \qquad \text{gesamte resultierende Widerstandskraft (} F_r + F_l \text{)}$$



Suchen der Lösung mit Hilfe des Lagrangeschen Formalismus für die x- und y- Richtung:

$$y(x) = \lambda \cdot x^2 \quad \text{Parabelbahn}$$

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m_k \cdot v^2 \quad v = x' \cdot \sqrt{1 + 4 \lambda^2 \cdot x^2}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \sqrt{1 + 4 \lambda^2 \cdot x^2} \quad \varphi' = \frac{1}{r} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \sqrt{1 + 4 \lambda^2 \cdot x^2} \quad \varphi' = \frac{x'}{r} \cdot \sqrt{1 + 4 \lambda^2 \cdot x^2}$$

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m_k \cdot x'^2 \cdot (1 + 4 \lambda^2 \cdot x^2)$$

$$E_p = m_k \cdot g \cdot y = \lambda \cdot m_k \cdot g \cdot x^2 \quad L = E_k - E_p$$

$$L = \frac{1}{2} x'(t)^2 \cdot (1 + 4 \lambda^2 \cdot x(t)^2) \cdot m_k - \lambda \cdot m_k \cdot g \cdot x(t)^2$$

Lagrangesche Formulierung der dissipativen Kräfte (Luftwiderstand und Reibung):

Reibung:

$$P_r = \int_0^v h_r(v) dv \quad h_r(v) = \mu \cdot (F_n + F_z) \quad F_n = \frac{m_k \cdot g}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}} \quad F_z = 2 \lambda \cdot m_k \cdot \frac{v^2}{\sqrt{(4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1)^3}}$$

$$h_r(v) = \mu \cdot m_k \cdot \left(\frac{g}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}} + 2 \lambda \cdot \frac{v^2}{\sqrt{(4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1)^3}} \right) \quad P_r = \mu \cdot m_k \cdot \int_0^v \left(\frac{g}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}} + 2 \lambda \cdot \frac{v^2}{\sqrt{(4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1)^3}} \right) dv$$

$$P_r = \mu \cdot m_k \cdot \left(\frac{g \cdot v}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}} + \frac{2}{3} \cdot \lambda \cdot \frac{v^3}{\sqrt{(4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1)^3}} \right) \quad P_r = \mu \cdot m_k \cdot \left(\frac{g \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}} + \frac{2}{3} \cdot \lambda \cdot \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}^3}{\sqrt{(4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1)^3}} \right)$$

Luftwiderstand:

$$P_l = \int_0^v h_l(v) dv \quad h_l(v) = k \cdot v^2 \quad P_l = k \cdot \int_0^v v^2 dv \quad P_l = \frac{k}{3} \cdot v^3 \quad P_l = \frac{k}{3} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}^3$$

Somit ergibt sich für die gesamten dissipativen Kräfte folgendes:

$$P = P_r + P_l$$

$$P = \mu \cdot m_k \cdot \left(\frac{g \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}} + \frac{2}{3} \cdot \lambda \cdot \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}^3}{\sqrt{(4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1)^3}} \right) + \frac{k}{3} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}^3$$

Allgemeine Lagrangesche Gleichung für die x und- y Koordinate:

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{dx'} - \frac{dL}{dx} + \frac{dP}{dx'} = 0 \quad \text{x-Koordinate}$$

x-Koordinate:

$$L = E_k - E_p \quad L = \frac{1}{2} x'(t)^2 \cdot (1 + 4 \lambda^2 \cdot x(t)^2) \cdot m_k - \lambda \cdot m_k \cdot g \cdot x(t)^2$$

$$\frac{dL}{dx'} = x'(t) \cdot (1 + 4 \lambda^2 \cdot x(t)^2) \cdot m_k$$

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{dx'} = x''(t) \cdot (4 \cdot \lambda^2 \cdot x(t)^2 + 1) \cdot m_k + 8 \cdot \lambda^2 \cdot x(t) \cdot x'(t)^2 \cdot m_k$$

$$\frac{dL}{dx} = \frac{1}{2} x'(t)^2 \cdot 8 \lambda^2 \cdot x(t) \cdot m_k - 2 \lambda \cdot m_k \cdot g \cdot x(t)$$

$$F_{LW}(t) = k \cdot v(t) \cdot |v(t)|$$

$$\frac{dP}{dx'} = k \cdot x'(t)^2 \cdot \sqrt{1 + 4 \lambda^2 \cdot x(t)^2} + \mu \cdot m_k \cdot \frac{g + 2 \cdot \lambda \cdot x'(t)^2}{1 + 4 \lambda^2 \cdot x(t)^2}$$

$$x''(t) \cdot (4 \cdot \lambda^2 \cdot x(t)^2 + 1) \cdot m_k + 8 \cdot \lambda^2 \cdot x(t) \cdot x'(t)^2 \cdot m_k - \left(\frac{1}{2} x'(t)^2 \cdot 8 \lambda^2 \cdot x(t) \cdot m_k - 2 \lambda \cdot m_k \cdot g \cdot x(t) \right) \cdot k \cdot |v(t)| + x'(t)^2 \cdot \sqrt{1 + 4 \lambda^2 \cdot x(t)^2} \cdot \mu \cdot m_k \cdot \frac{g + 2 \cdot \lambda \cdot x'(t)^2}{1 + 4 \lambda^2 \cdot x(t)^2} = 0$$

$$\lambda := 2 \cdot 0.03064734 \frac{1}{m} \quad m_k := 5.5 \text{ kg} \quad \delta_l := 1.29 \text{ kg} \cdot m^{-3} \quad c_w := 1.5 \quad d := 20 \text{ cm} \quad A_k := \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \quad k := \frac{1}{2} \cdot \delta_l \cdot c_w \cdot A_k$$

$$x_0 := 50 \text{ m} \quad t_e := 200 \text{ s} \quad \mu := 0.25 \quad y_0 := \lambda \cdot x_0^2 = 153.24 \text{ m}$$

$$x(0 \text{ s}) = x_0 \quad x'(0 \text{ s}) = 0 \frac{m}{s}$$

$$x''(t) \cdot (4 \cdot \lambda^2 \cdot x(t)^2 + 1) \cdot m_k + 8 \cdot \lambda^2 \cdot x(t) \cdot x'(t)^2 \cdot m_k - \left(\frac{1}{2} x'(t)^2 \cdot 8 \lambda^2 \cdot x(t) \cdot m_k - 2 \lambda \cdot m_k \cdot g \cdot x(t) \right) \cdot k \cdot |v(t)| + k \cdot x'(t) \cdot |x'(t)| \cdot \sqrt{1 + 4 \lambda^2 \cdot x(t)^2} + \mu \cdot m_k \cdot \frac{g + 2 \cdot \lambda \cdot x'(t)^2}{1 + 4 \lambda^2 \cdot x(t)^2} = 0$$

$$x := \text{odesolve}(x(t), t_e, 10^6)$$

$$y(t) := \lambda \cdot x(t)^2$$

$$L(t) := \frac{1}{2} x'(t)^2 \cdot (1 + 4 \lambda^2 \cdot x(t)^2) \cdot m_k - \lambda \cdot m_k \cdot g \cdot x(t)^2$$

$$P(t) := \mu \cdot m_k \cdot x'(t) \cdot \left(\frac{3 g + 2 \cdot \lambda \cdot x'(t)^2 \cdot (1 + 4 \lambda^2 \cdot x(t)^2)}{3 \sqrt{1 + 4 \lambda^2 \cdot x(t)^2}} \right) + \frac{k}{3} \cdot x'(t)^3 \cdot \left((1 + 4 \lambda^2 \cdot x(t)^2) \right)^3$$

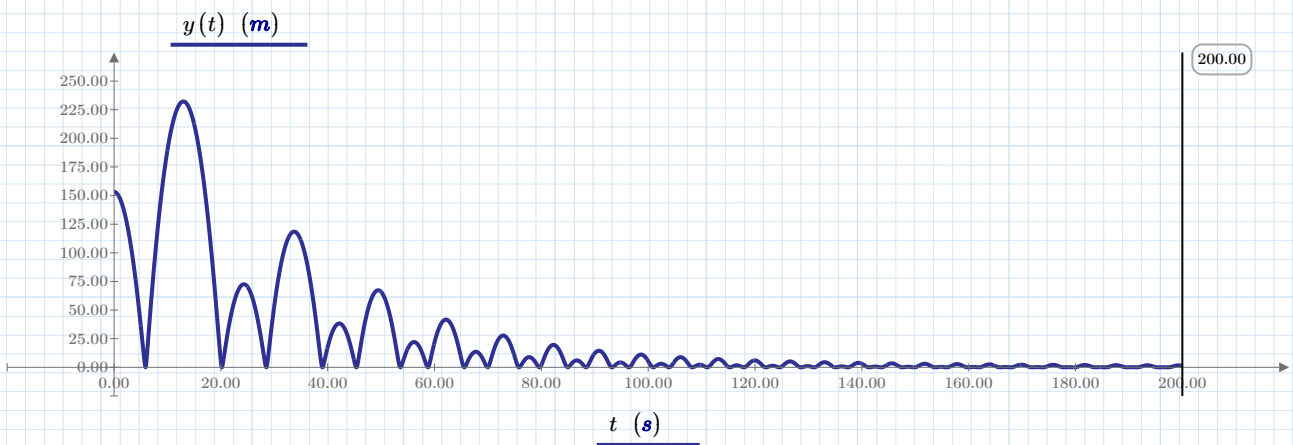
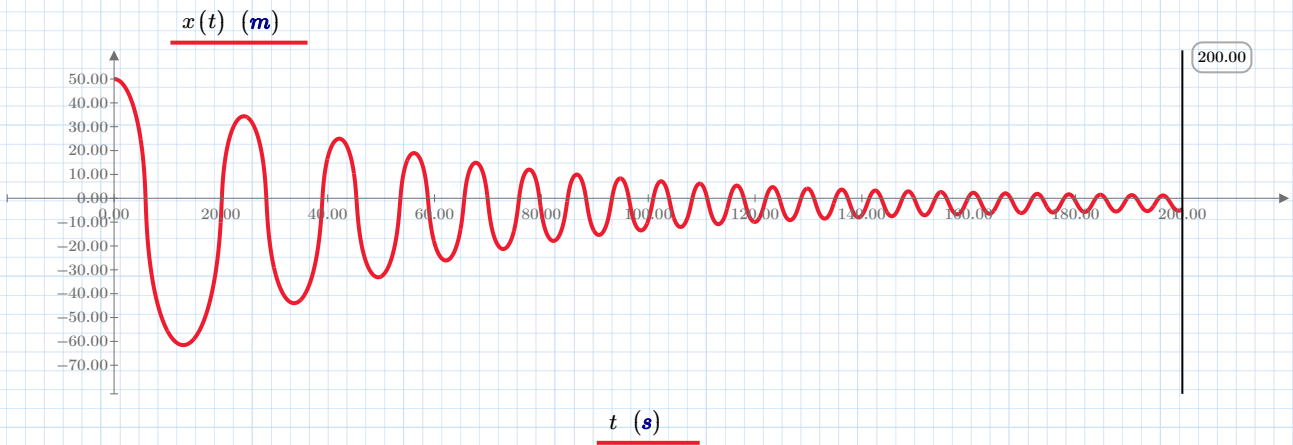
$$E_k(t) := \frac{1}{2} \cdot m_k \cdot x'(t)^2 \cdot (1 + 4 \lambda^2 \cdot x(t)^2)$$

$$E_p(t) := m_k \cdot g \cdot (y_0 - \lambda \cdot x(t)^2)$$

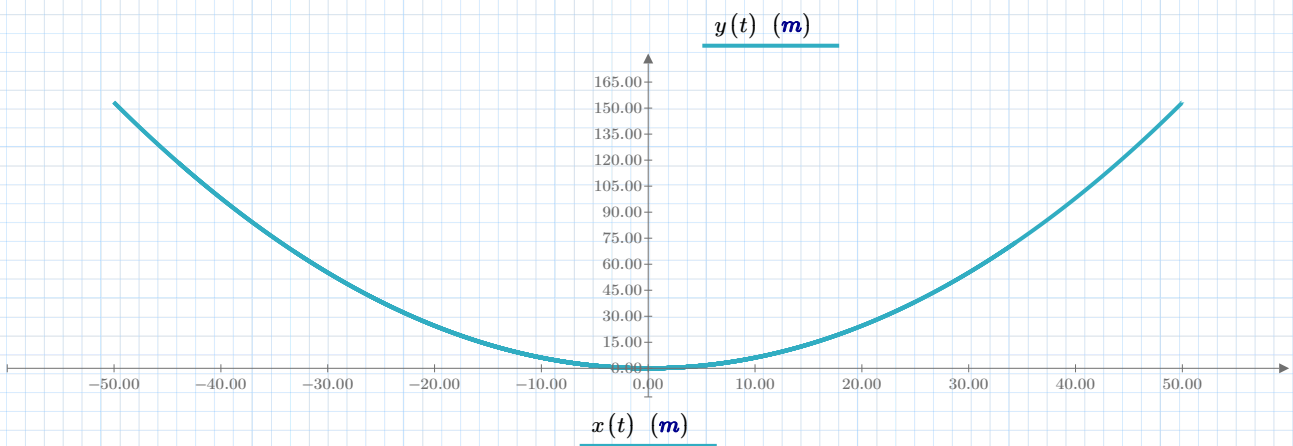
$$L(t) := E_k(t) + E_p(t)$$

$t := 0 \text{ s}, 0.01 \text{ s} \dots t_e$

Diagramm für die Koordinaten

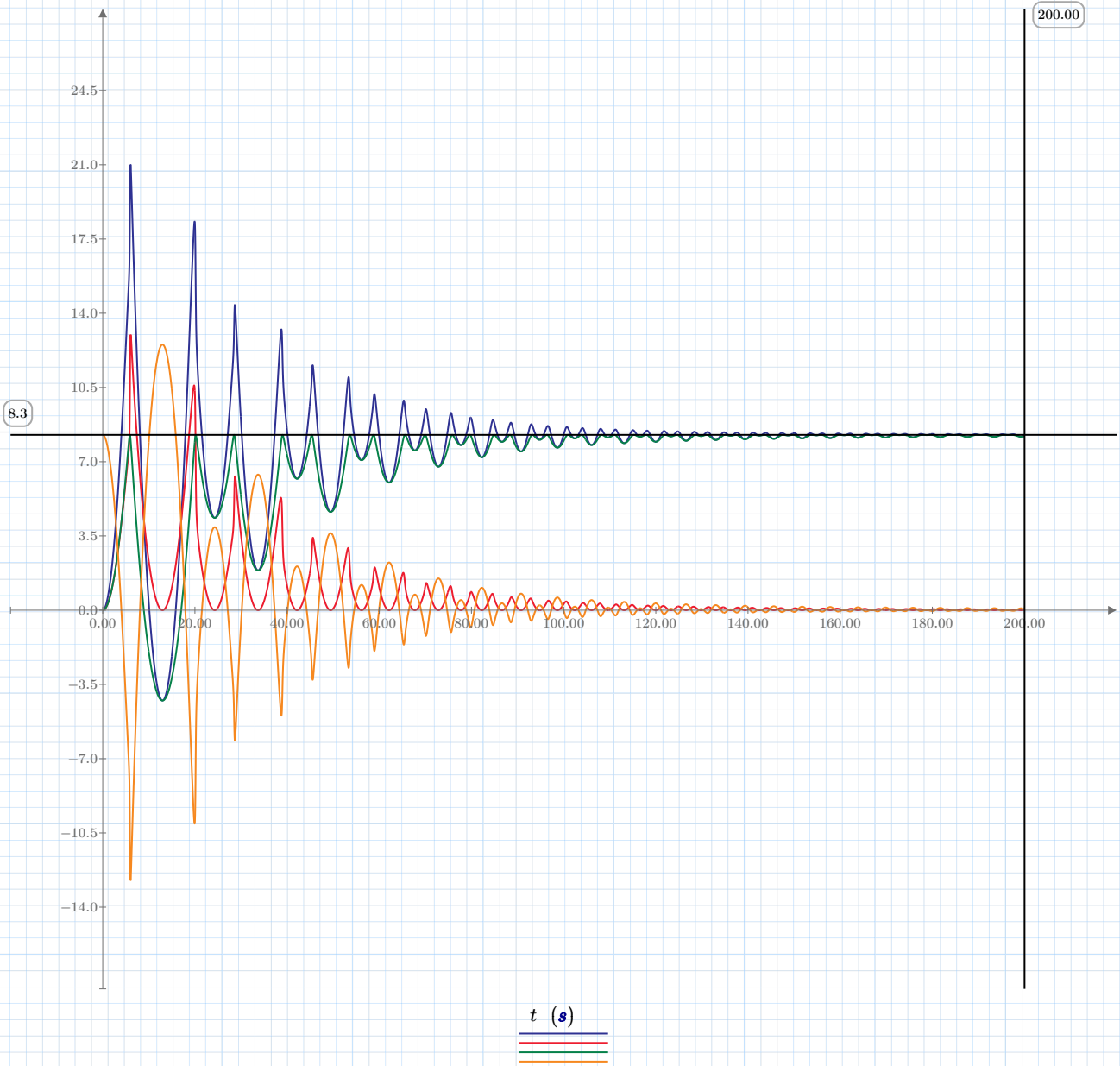


Trajektorie:



$kJ := 10^3 J$
 $W_0 := m_k \cdot g \cdot \lambda \cdot x_0^2 = 8265.06 J$
 $W_{ges}(t) := E_k(t) + E_p(t)$
 $W_{Reibung}(t) := W_0 - W_{ges}(t)$

$L(t)$ (kJ)
 $E_k(t)$ (kJ)
 $E_p(t)$ (kJ)
 $W_{Reibung}(t)$ (kJ)



Verlauf der Bahngeschwindigkeit und der Bahnbeschleunigung:

$$v(t) := x'(t) \cdot \sqrt{1 + 4 \lambda^2 \cdot x(t)^2}$$

$$a(t) := \frac{x''(t) \cdot (1 + 4 \lambda^2 \cdot x(t)^2) + 4 \lambda^2 \cdot x(t) \cdot x'(t)^2}{\sqrt{1 + 4 \lambda^2 \cdot x(t)^2}}$$

