INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

MP-288 - Exercises on Optimality Necessary Conditions II

Prof.: Rafael T. L. Ferreira

Aluno : Guilherme de Aquino Pereira Nunes

1) Find optimum points for the problem:

$$\min_{x_1,x_2} f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$$

$$\text{s.t.: } g(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 6 = 0$$

Use the KKT conditons with and without slack variables. Plot the functions and check the solutions found. Plot the gradients at the solution points and show their relationship with the Lagrange multipliers values. Verify second order sufficient conditions.

Sem "slack variables" :

$$f(x_1,x_2) := x_1^2 + x_2^2 - 3\cdot x_1\cdot x_2$$

$$g(x_1,x_2) := x_1^2 + x_2^2 - 6 \qquad g(x_1,x_2) = 0$$

Definimos o Lagrangeano :

$$L(x_1,x_2,\lambda_1) := f(x_1,x_2) + \lambda_1\cdot g(x_1,x_2)$$

Calculamos o gradiente :

$$G(x_1,x_2,\lambda_1) := \nabla_{x_1,x_2,\lambda_1} L(x_1,x_2,\lambda_1) = \begin{pmatrix} 2\cdot x_1 - 3\cdot x_2 + 2\cdot\lambda_1\cdot x_1 \\ 2\cdot x_2 - 3\cdot x_1 + 2\cdot\lambda_1\cdot x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 - 6 \end{pmatrix}$$

Resolvemos o gradiente :

$$X^* := G(x_1, x_2, \lambda_1) \text{ solve}, x_1, x_2, \lambda_1 \;=\; \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & -\frac{5}{2} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Ou seja, temos 4 pontos candidatos a extremo, onde nos dois primeiros o valor de λ_1 é positivo. Analisando o valor da função f para cada extremo :

$$\overrightarrow{f\left(X^{*\langle 1\rangle}, X^{*\langle 2\rangle}\right)} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Portanto, verificamos que os dois primeiros valores são mínimos. Alem disso, são os termos que os multiplicadores de Lagrange são positivos.

Plotando os gradientes :

$$G1_{plot} := \text{PlotGrad}\left(f, X^*_{1,1}, X^*_{1,2}, 1\right)$$

$$G2_{plot} := \text{PlotGrad}\left(f, X^*_{2,1}, X^*_{2,2}, 1\right)$$

$$G3_{plot} := \text{PlotGrad}\left(f, X^*_{3,1}, X^*_{3,2}, 1\right)$$

$$G4_{plot} := \text{PlotGrad}\left(f, X^*_{4,1}, X^*_{4,2}, 1\right)$$

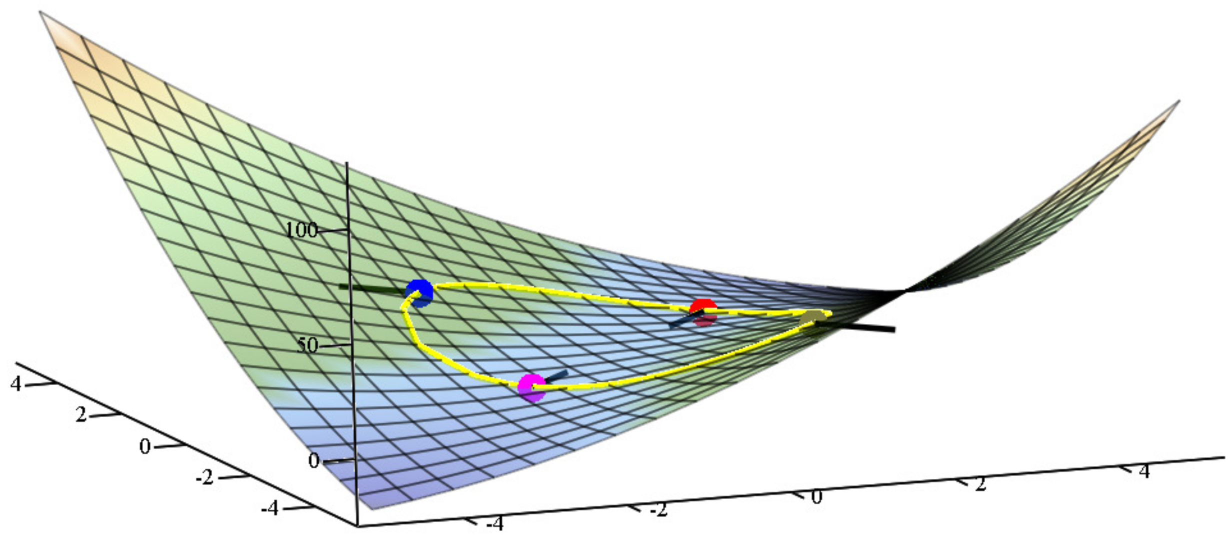
Plotando os pontos:

$$P_1 := \left[\left(X^*_{1,1}\right)\ \left(X^*_{1,2}\right)\ \left(f\left(X^*_{1,1}, X^*_{1,2}\right)\right)\right]^T$$

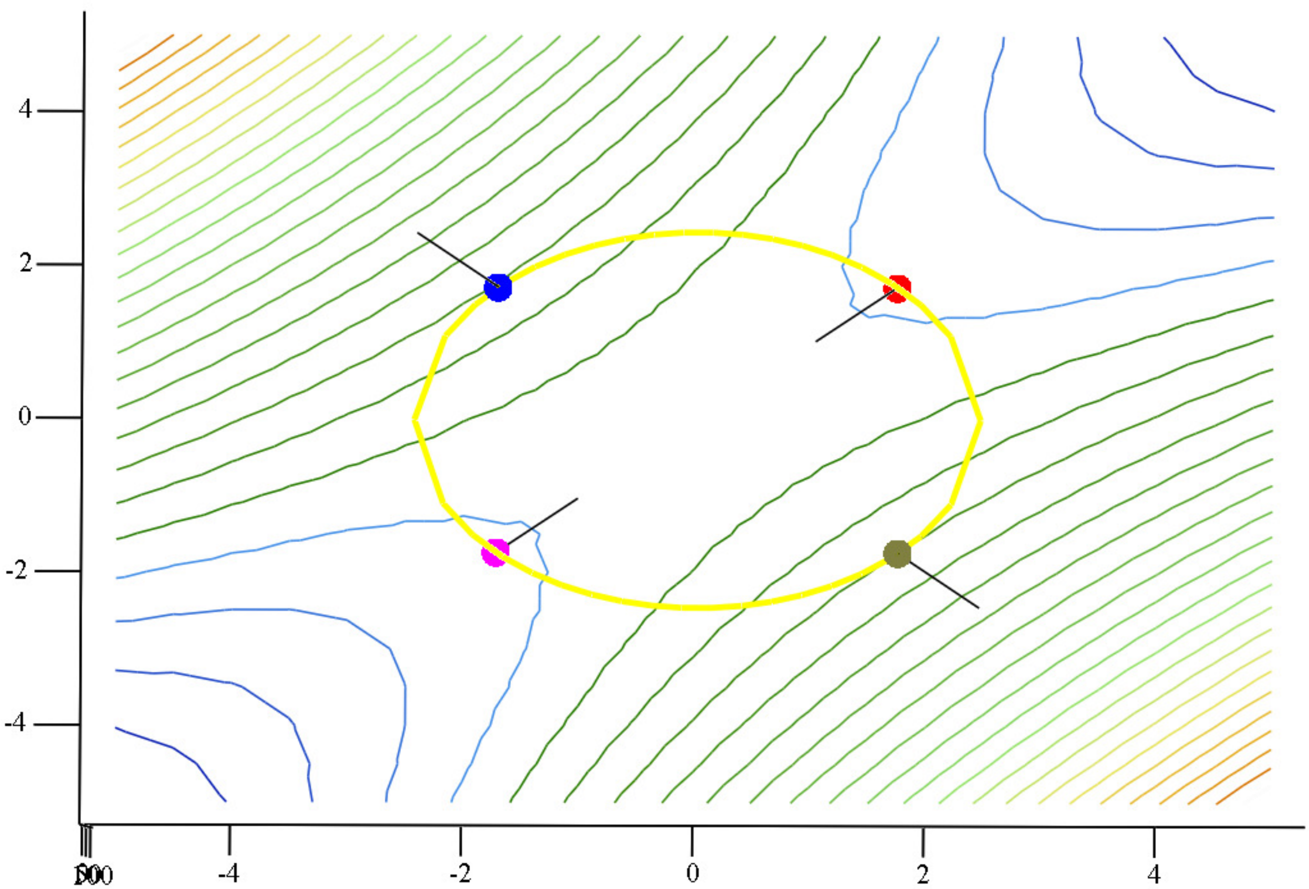
$$P_2 := \left[\left(X^*_{2,1}\right)\ \left(X^*_{2,2}\right)\ \left(f\left(X^*_{2,1}, X^*_{2,2}\right)\right)\right]^T$$

$$P_3 := \left[\left(X^*_{3,1}\right)\ \left(X^*_{3,2}\right)\ \left(f\left(X^*_{3,1}, X^*_{3,2}\right)\right)\right]^T$$

$$P_4 := \left[\left(X^*_{4,1}\right)\ \left(X^*_{4,2}\right)\ \left(f\left(X^*_{4,1}, X^*_{4,2}\right)\right)\right]^T$$



$f, curve_1, curve_2, P_1, P_2, P_3, P_4, G1_{plot}, G2_{plot}, G3_{plot}, G4_{plot}$



$f, curve_1, curve_2, P_1, P_2, P_3, P_4, G1_{plot}, G2_{plot}, G3_{plot}, G4_{plot}$

Calculando os valores do gradiente da função f :

Multiplicador de Lagrange :

$$G_f(x_1, x_2) := \left(\nabla_{x_1, x_2} f(x_1, x_2)\right) = \begin{pmatrix} 2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 \\ 2 \cdot x_2 - 3 \cdot x_1 \end{pmatrix}$$

$$X^{*\langle 3 \rangle} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ -2.5 \\ -2.5 \end{pmatrix}$$

$$G_f\left(X^*_{1,1}, X^*_{1,2}\right)^T = (-1.7 \quad -1.7)$$

$$G_f\left(X^*_{2,1}, X^*_{2,2}\right)^T = (1.7 \quad 1.7)$$

$$G_f\left(X^*_{3,1}, X^*_{3,2}\right)^T = (-8.7 \quad 8.7)$$

$$G_f\left(X^*_{4,1}, X^*_{4,2}\right)^T = (8.7 \quad -8.7)$$

Vemos que os multiplicadores de Lagrange são positivos para os pontos de mínimo. Além disso, os gradientes dos valores mínimos direcionam para dentro da curva, ou seja, para região de valores menores, enquanto que os gradientes dos pontos de máximo direcionam para fora do círculo, para região de valores maiores.

Para verificarmos as condições de segunda ordem, temos:

$$\text{eigenvals}\left(\text{Hessian}_3\left(L, X^*_{1,1}, X^*_{1,2}, X^*_{1,3}\right)\right)^T = (-4.9 \quad 6 \quad 4.9)$$

$$\text{eigenvals}\left(\text{Hessian}_3\left(L, X^*_{2,1}, X^*_{2,2}, X^*_{2,3}\right)\right)^T = (-4.9 \quad 6 \quad 4.9)$$

$$\text{eigenvals}\left(\text{Hessian}_3\left(L, X^*_{3,1}, X^*_{3,2}, X^*_{3,3}\right)\right)^T = (4.9 \quad -6 \quad -4.9)$$

$$\text{eigenvals}\left(\text{Hessian}_3\left(L, X^*_{4,1}, X^*_{4,2}, X^*_{4,3}\right)\right)^T = (4.9 \quad -6 \quad -4.9)$$

Vemos que nem todos os autovalores da matrix Hessiana são positivos, portanto, não da para afirmar a natureza de cada ponto apesar de já termos verificado no gráfico quais pontos são mínimos e quais são máximos.

Com "slack variables" :

$$f(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2 - 3 \cdot x_1 \cdot x_2$$

$$g(x_1, x_2, s_1) := x_1^2 + x_2^2 - 6 + s_1^2 \qquad g(x_1, x_2) = 0$$

Como a condição é de igualdade, sabemos que s_1^2 será nulo.

$$s_1^2 = 0$$

Assim, o problema será igual ao anterior sem a "slack variable" .

2) Using KKT conditions, find optimum points for the problem:

$$\min_{x_1,x_2} f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 2$$

$$\text{s.t.: } g_1(x_1,x_2) = -2x_1 - x_2 + 4 \le 0$$

$$g_2(x_1,x_2) = -x_1 - 2x_2 + 4 \le 0$$

Plot the functions and check the solutions found. Plot the gradients at the solution points and show their relationship with the Lagrange multipliers values. Optional: check the second order sufficient conditions.

$$f(x_1,x_2) := x_1^2 + x_2^2 - 2\cdot x_1 - 2\cdot x_2 + 2$$

$$g_1(x_1,x_2) := -2\cdot x_1 - x_2 + 4 \quad \text{-->} \quad g_1(x_1,x_2) \le 0$$

$$g_2(x_1,x_2) := -x_1 - 2\cdot x_2 + 4 \quad \text{-->} \quad g_2(x_1,x_2) \le 0$$

Definimos as "slack variables" :

$$g'_1(x_1,x_2,s_1) := -2\cdot x_1 - x_2 + 4 + s_1^2 \quad \text{-->} \quad \left| \begin{array}{l} g'_1(x_1,x_2,s_1) = 0 \\ s_1 \ge 0 \end{array} \right.$$

$$g'_2(x_1,x_2,s_2) := -x_1 - 2\cdot x_2 + 4 + s_2^2 \quad \text{-->} \quad \left| \begin{array}{l} g'_2(x_1,x_2,s_2) = 0 \\ s_2 \ge 0 \end{array} \right.$$

Definimos o Lagrangeano :

$$L(x_1,x_2,u_1,u_2,s_1,s_2) := f(x_1,x_2) + u_1\cdot g'_1(x_1,x_2,s_1) + u_2\cdot g'_2(x_1,x_2,s_2)$$

$$L(x_1,x_2,u_1,u_2,s_1,s_2) = 4\cdot u_1 + 4\cdot u_2 - 2\cdot x_1 - 2\cdot x_2 + s_1^2\cdot u_1 + s_2^2\cdot u_2 + x_1^2 + x_2^2 - 2\cdot u_1\cdot x_1 - u_1\cdot x_2 - u_2\cdot x_1 - 2\cdot u_2\cdot x_2 + 2$$

Calculamos o gradiente :

$$G(x_1,x_2,u_1,u_2,s_1,s_2) := \nabla_{x_1,x_2,u_1,u_2,s_1,s_2} L(x_1,x_2,u_1,u_2,s_1,s_2) = \begin{pmatrix} 2\cdot x_1 - u_2 - 2\cdot u_1 - 2 \\ 2\cdot x_2 - 2\cdot u_2 - u_1 - 2 \\ s_1^{\,2} - 2\cdot x_1 - x_2 + 4 \\ s_2^{\,2} - x_1 - 2\cdot x_2 + 4 \\ 2\cdot s_1\cdot u_1 \\ 2\cdot s_2\cdot u_2 \end{pmatrix}$$

Temos as "switchings conditions" :

$$2\cdot s_1\cdot u_1 = 0$$

$$2\cdot s_2\cdot u_2 = 0$$

As "switching conditions" nos dão 4 possibilidades de solução . Analisando cada uma separadamente temos :

Caso $u_1 = 0$ e $u_2 = 0$

.

$$\begin{pmatrix} 2\cdot x_1 - 0 - 2\cdot 0 - 2 \\ 2\cdot x_2 - 2\cdot 0 - 0 - 2 \\ s_1^{\,2} - 2\cdot x_1 - x_2 + 4 \\ s_2^{\,2} - x_1 - 2\cdot x_2 + 4 \\ 2\cdot s_1\cdot 0 \\ 2\cdot s_2\cdot 0 \end{pmatrix} \text{solve}, x_1, x_2, s_1, s_2 \; = \begin{pmatrix} 1 & 1 & i & i \\ 1 & 1 & i & -i \\ 1 & 1 & -i & i \\ 1 & 1 & -i & -i \end{pmatrix}$$

Ou seja, encontramos valores negativos para $s_1^{\,2}$ e $s_2^{\,2}$, o que não satifaz a solução.

Caso $u_1 = 0$ e $s_2 = 0$

.

$$\begin{pmatrix} 2\cdot x_1 - u_2 - 2\cdot 0 - 2 \\ 2\cdot x_2 - 2\cdot u_2 - 0 - 2 \\ s_1^{\,2} - 2\cdot x_1 - x_2 + 4 \\ 0^2 - x_1 - 2\cdot x_2 + 4 \\ 2\cdot s_1\cdot 0 \\ 2\cdot 0\cdot u_2 \end{pmatrix} \text{solve}, x_1, x_2, u_2, s_1 \; = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & \frac{7}{5} & \frac{2}{5} & \frac{\sqrt{5}\cdot i}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{7}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{\sqrt{5}\cdot i}{5} \end{pmatrix}$$

Ou seja, encontramos valores negativos para $s_1^{\,2}$, o que não satifaz a solução.

Caso $u_2 = 0$ e $s_1 = 0$

.

$$\begin{pmatrix} 2\cdot x_1 - 0 - 2\cdot u_1 - 2 \\ 2\cdot x_2 - 2\cdot 0 - u_1 - 2 \\ 0^2 - 2\cdot x_1 - x_2 + 4 \\ s_2^{\,2} - x_1 - 2\cdot x_2 + 4 \\ 2\cdot 0\cdot u_1 \\ 2\cdot s_2\cdot 0 \end{pmatrix} \text{solve}, x_1, x_2, u_1, s_2 \;=\; \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} & \frac{\sqrt{5}\cdot i}{5} \\ \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{\sqrt{5}\cdot i}{5} \end{pmatrix}$$

Ou seja, encontramos valores negativos para $s_2^{\,2}$, o que não satifaz a solução.

Caso $s_1 = 0$ e $s_2 = 0$

.

$$X^* := \begin{pmatrix} 2\cdot x_1 - u_2 - 2\cdot u_1 - 2 \\ 2\cdot x_2 - 2\cdot u_2 - u_1 - 2 \\ 0^2 - 2\cdot x_1 - x_2 + 4 \\ 0^2 - x_1 - 2\cdot x_2 + 4 \\ 2\cdot 0\cdot u_1 \\ 2\cdot 0\cdot u_2 \end{pmatrix} \text{solve}, x_1, x_2, u_1, u_2 \;=\; \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

Ou seja, encontramos valores positivos para u_1 e u_2, o que satifaz a solução.

Calculando o valor da função no ponto extremo:

$$f\left(X^*_{1,1}, X^*_{1,2}\right) = 0.2$$

Plotamos o ponto de extremo no gráfico :

$$P_1 := \left[\left(X^*_{1,1}\right) \; \left(X^*_{1,2}\right) \; \left(f\left(X^*_{1,1}, X^*_{1,2}\right) + 0.5\right)\right]^T$$

$$P1_{Line} := Trace_{VerticalLine}\left(X^*_{1,1}, X^*_{1,2}\right)$$

Plotando as fronteiras projetadas na superficie:

$x_{init} := -2$ $\qquad x_{end} := 6$

$$X2_{g1}(x_1) := g_1(x_1, x_2) = 0 \;=\; 4 - 2\cdot x_1$$

$$Line_{g1} := Trace_{3DLine}(-1, 3, X2_{g1}, f)$$

$$Plane_{g1} := Trace_{VerticalPlane}(-1, 3, X2_{g1})$$

$$\Delta X2_{g1}(x_1) := g_1(x_1, x_2) = 0.5 \;=\; 3.5 - 2\cdot x_1$$

$$Line_{\Delta g1} := Trace_{3DLine}(-1, 3, \Delta X2_{g1}, f)$$

$$Plane_{\Delta g1} := Trace_{VerticalPlane}(-1, 3, \Delta X2_{g1})$$

$$X2_{g2}(x_1) := g_2(x_1, x_2) = 0 \;=\; 2 - \frac{x_1}{2}$$

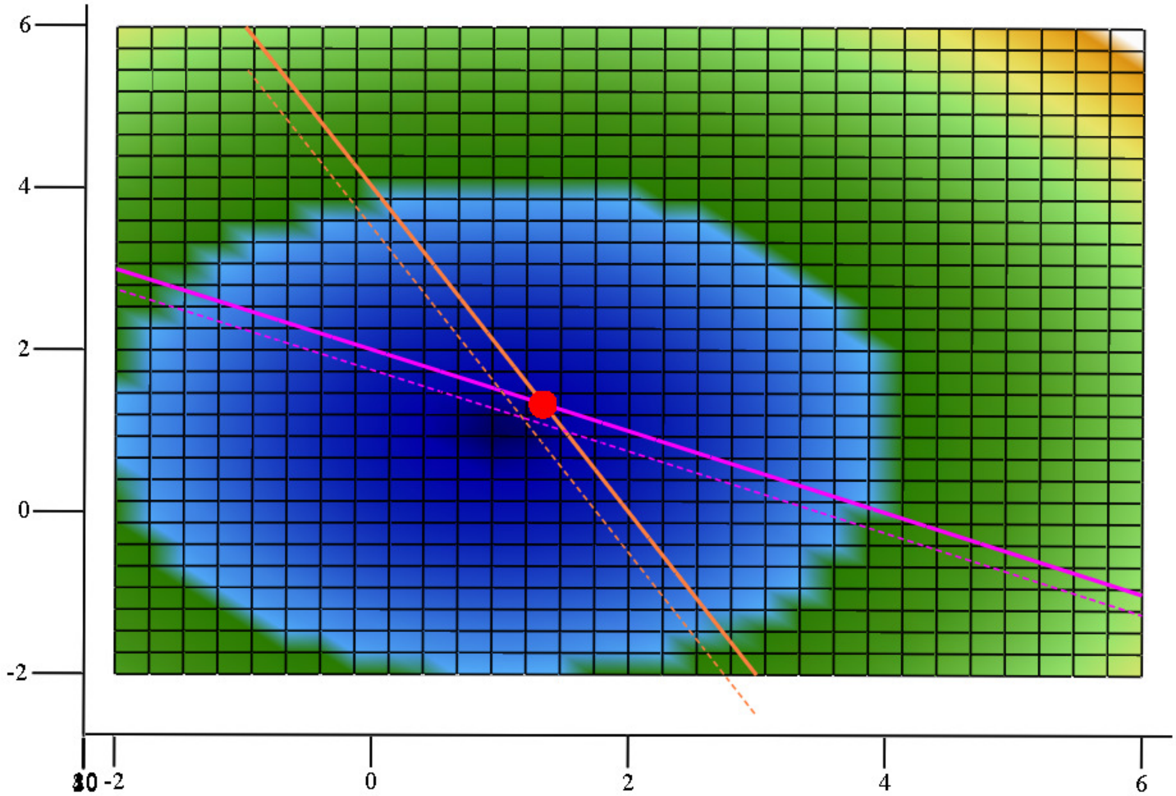
$$Line_{g2} := Trace_{3DLine}(x_{init}, x_{end}, X2_{g2}, f)$$

$$Plane_{g2} := Trace_{VerticalPlane}(x_{init}, x_{end}, X2_{g2})$$

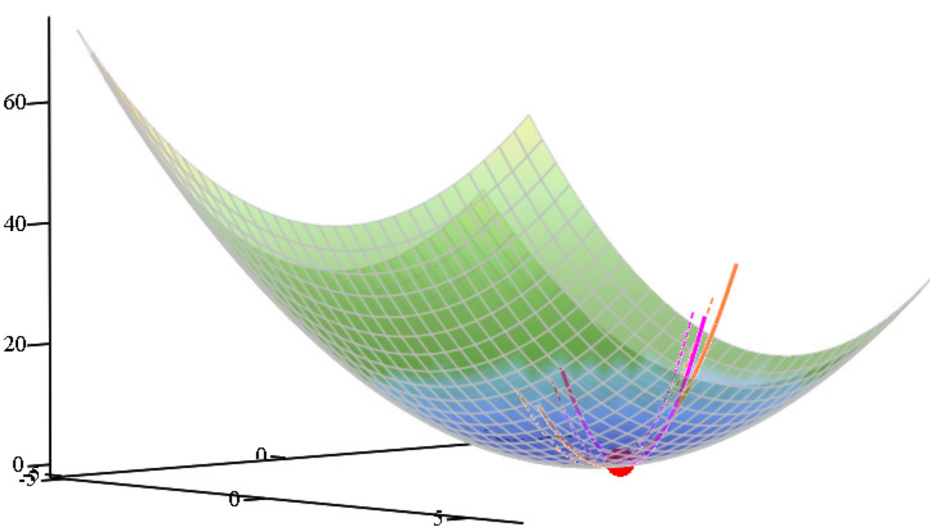
$$\Delta X2_{g2}(x_1) := g_2(x_1, x_2) = 0.5 \;=\; 1.8 - 0.5\cdot x_1$$

$$Line_{\Delta g2} := Trace_{3DLine}(x_{init}, x_{end}, \Delta X2_{g2}, f)$$

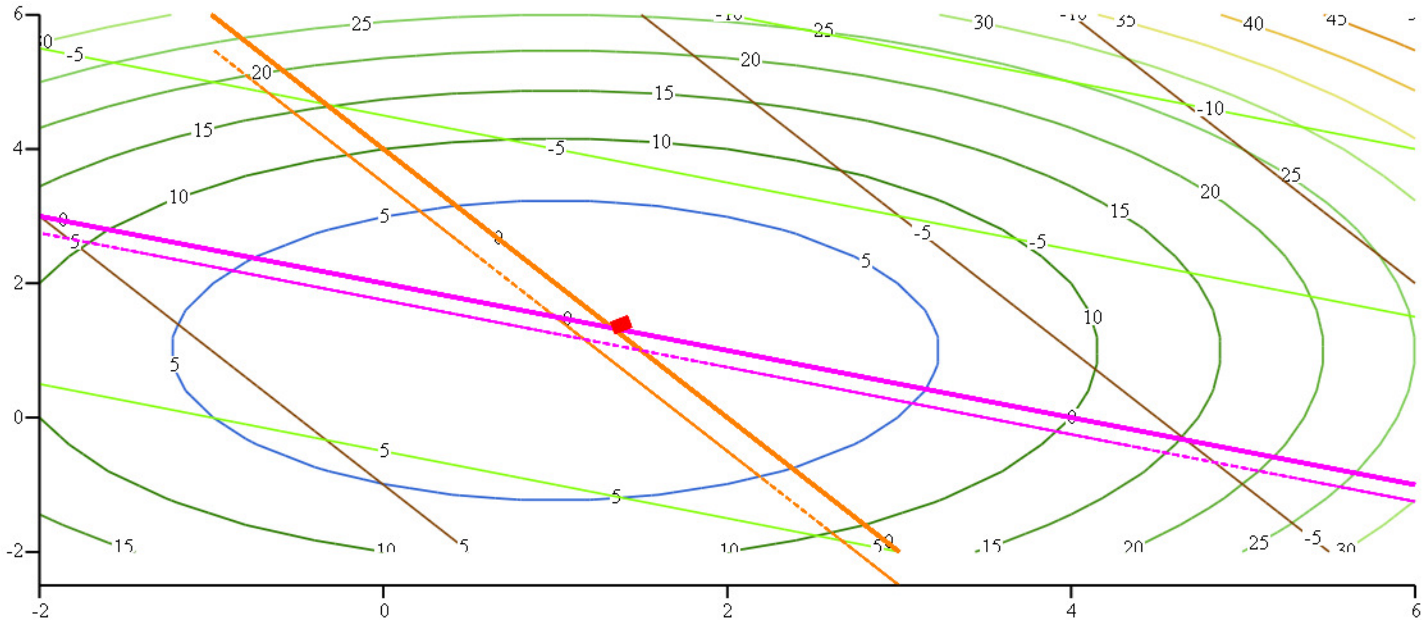
$$Plane_{\Delta g2} := Trace_{VerticalPlane}(x_{init}, x_{end}, \Delta X2_{g2})$$



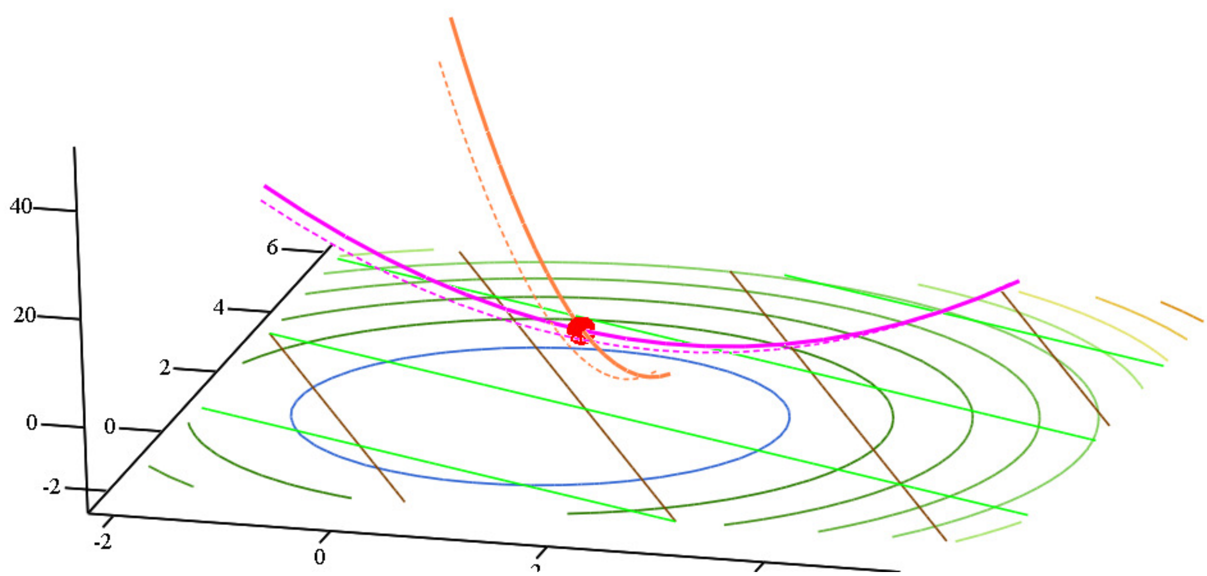
$f, P_1, Line_{g1}, Line_{\Delta g1}, Line_{g2}, Line_{\Delta g2}$



$f, P_1, Line_{g1}, Line_{\Delta g1}, Line_{g2}, Line_{\Delta g2}$



$f, g_1, g_2, Plane_{g1}, Plane_{\Delta g1}, Plane_{g2}, Plane_{\Delta g2}, P1_{Line}$



$f, P_1, Line_{g1}, Line_{\Delta g1}, Line_{g2}, Line_{\Delta g2}, g_1, g_2$

Analisando os termos de segunda ordem :

$L'(X) := Change\_Input\_Format_{Field\_to\_Vector6}(L, X)$

$X''* := \left(X*_{1,1} \;\; X*_{1,2} \;\; X*_{1,3} \;\; X*_{1,4} \;\; 0 \;\; 0 \right)^T$

$$L_{Hessian} := \mathrm{Hessian}(L', X''*) = \begin{pmatrix} 2 & -0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.44 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.44 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{eigenvals}\left(L_{Hessian}\right)^T = \begin{pmatrix} 4.16 & 2.41 & -2.16 & -0.41 & 0.44 & 0.44 \end{pmatrix}$$

Nem todos os autovalores da matrix Hessiana do Lagrangeano são positivos, logo, não é possível dizer se a matrix Hessiana é positiva definida e consequentemente, não é possível dizer se o ponto extremo verificado é um mínimo apesar de termos constatado gráficamente.

3) Using KKT conditions, find optimum points for the problem:

$$\max_{x_1,x_2} f(x_1,x_2) = -(x_1-1)^2 - (x_2-1)^2$$

$$\text{s.t.: } x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1 - x_2 = 2$$

Tip: put the problem in standard form. Plot the functions and check the solution points found. Optional: check the second order sufficient conditions.

Na forma padrão o problema pode ser escrito :

$$\underset{x_1,x_2}{\text{Minimize}}(f(x_1,x_2)) \qquad f(x_1,x_2) := (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2$$

s.t.:

$$h(x_1,x_2) := x_1 - x_2 - 2 \qquad h(x_1,x_2) = 0$$

$$g(x_1,x_2) := -x_1 - x_2 + 4 \qquad g(x_1,x_2) \leq 0$$

Definimos as "slack variables" :

$$g'(x_1,x_2,s_1) := -x_1 - x_2 + 4 + s_1^2 \qquad \text{-->} \qquad \left| \begin{array}{l} g'_1(x_1,x_2,s_1) = 0 \\ s_1 \geq 0 \end{array} \right.$$

Definimos o Lagrangeano :

$$L(x_1,x_2,v,u,s_1) := f(x_1,x_2) + v \cdot h(x_1,x_2) + u \cdot g'(x_1,x_2,s_1)$$

$$L(x_1,x_2,v,u,s_1) = 4 \cdot u - 2 \cdot v - 2 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + s_1^2 \cdot u + x_1^2 + x_2^2 - u \cdot x_1 - u \cdot x_2 + v \cdot x_1 - v \cdot x_2 + 2$$

Calculamos o gradiente :

$$G(x_1,x_2,v,u,s_1) := \nabla_{x_1,x_2,v,u,s_1} L(x_1,x_2,v,u,s_1) = \begin{pmatrix} v - u + 2 \cdot x_1 - 2 \\ 2 \cdot x_2 - v - u - 2 \\ x_1 - x_2 - 2 \\ s_1^2 - x_1 - x_2 + 4 \\ 2 \cdot s_1 \cdot u \end{pmatrix}$$

Temos as "switchings conditions" :

$$2 \cdot s_1 \cdot u = 0$$

As "switching conditions" nos dão 2 possibilidades de solução . Analisando cada uma separadamente temos :

Caso $u = 0$:

$$\begin{pmatrix} v - u + 2 \cdot x_1 - 2 \\ 2 \cdot x_2 - v - u - 2 \\ x_1 - x_2 - 2 \\ s_1^{\,2} - x_1 - x_2 + 4 \\ 2 \cdot s_1 \cdot u \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, u = 0 \\ \text{solve}, x_1, x_2, v, u, s_1 \end{array} \right. = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 & \sqrt{2} \cdot i \\ 2 & 0 & -2 & 0 & -\sqrt{2} \cdot i \end{pmatrix}$$

Ou seja, encontramos valores negativos para $s_1^{\,2}$, o que não satifaz a solução.

Caso $s_1 = 0$:

$$X^* := \begin{pmatrix} v - u + 2 \cdot x_1 - 2 \\ 2 \cdot x_2 - v - u - 2 \\ x_1 - x_2 - 2 \\ s_1^{\,2} - x_1 - x_2 + 4 \\ 2 \cdot s_1 \cdot u \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, s_1 = 0 \\ \text{solve}, x_1, x_2, v, u, s_1 \end{array} \right. = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ou seja, temos valor positivo para $s_1^{\,2}$ e para u, o resultadosatifaz a solução.

Calculando o valor da função no ponto extremo:

$$f\left(X^*_{1,1}, X^*_{1,2}\right) = 4$$

Plotamos o ponto de extremo no gráfico :

$$P_1 := \left[\left(X^*_{1,1}\right) \ \left(X^*_{1,2}\right) \ \left(f\left(X^*_{1,1}, X^*_{1,2}\right) + 0.5\right)\right]^T$$

$$P1_{Line} := Trace_{VerticalLine}\left(X^*_{1,1}, X^*_{1,2}\right)$$

Plotando as fronteiras projetadas na superficie:

$$x_{init} := -2 \qquad x_{end} := 5$$

$$X2_g(x_1) := g(x_1, x_2) = 0 \ = \ 4 - x_1$$

$$Line_g := Trace_{3DLine}\left(x_{init}, x_{end}, X2_g, f\right)$$

$$Plane_g := Trace_{VerticalPlane}\left(x_{init}, x_{end}, X2_g\right)$$

$$\Delta X2_g(x_1) := g(x_1, x_2) = 0.5 \ = \ 3.5 - x_1$$

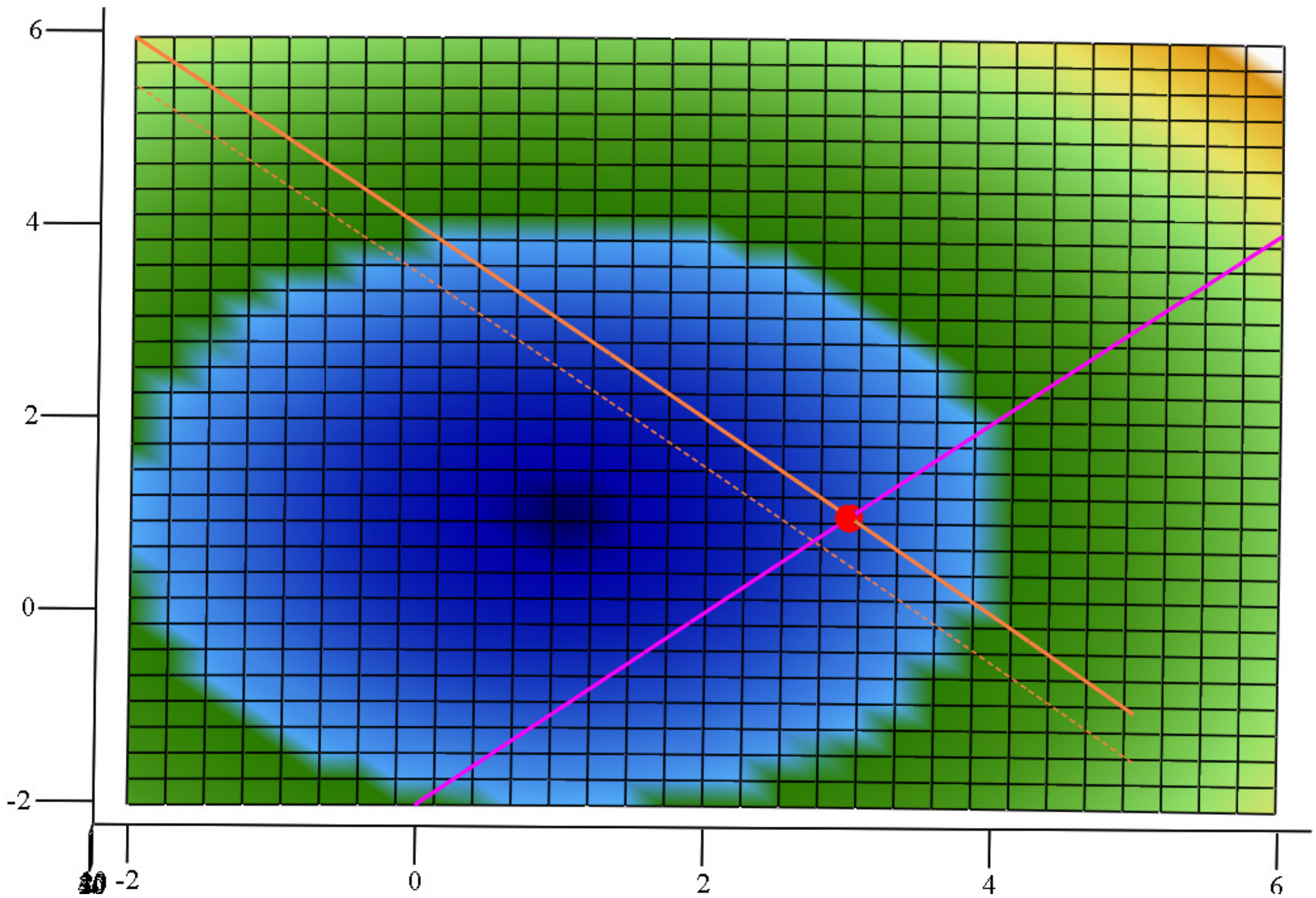
$$Line_{\Delta g} := Trace_{3DLine}\left(x_{init}, x_{end}, \Delta X2_g, f\right)$$

$$Plane_{\Delta g} := Trace_{VerticalPlane}\left(x_{init}, x_{end}, \Delta X2_g\right)$$

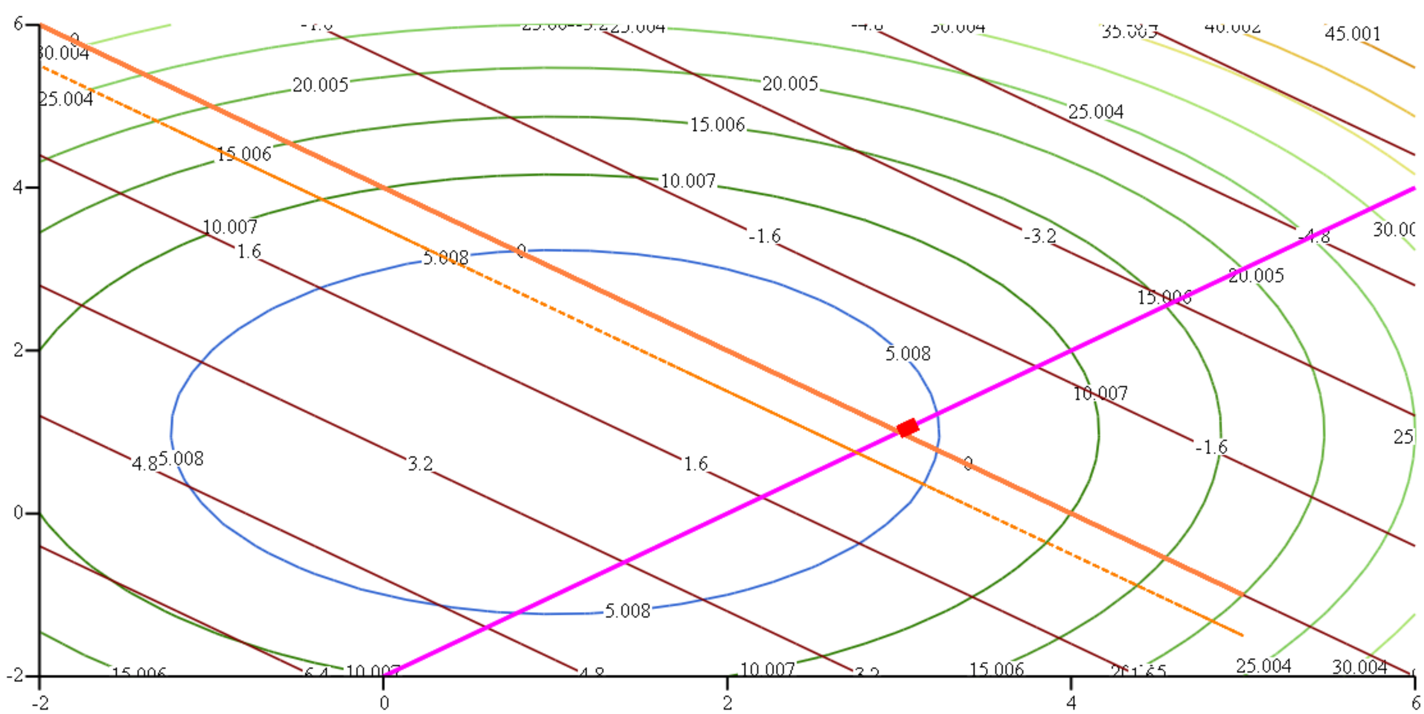
$$X2_h(x_1) := h(x_1, x_2) = 0 \ = \ x_1 - 2$$

$$Line_h := Trace_{3DLine}\left(0, 6, X2_h, f\right)$$

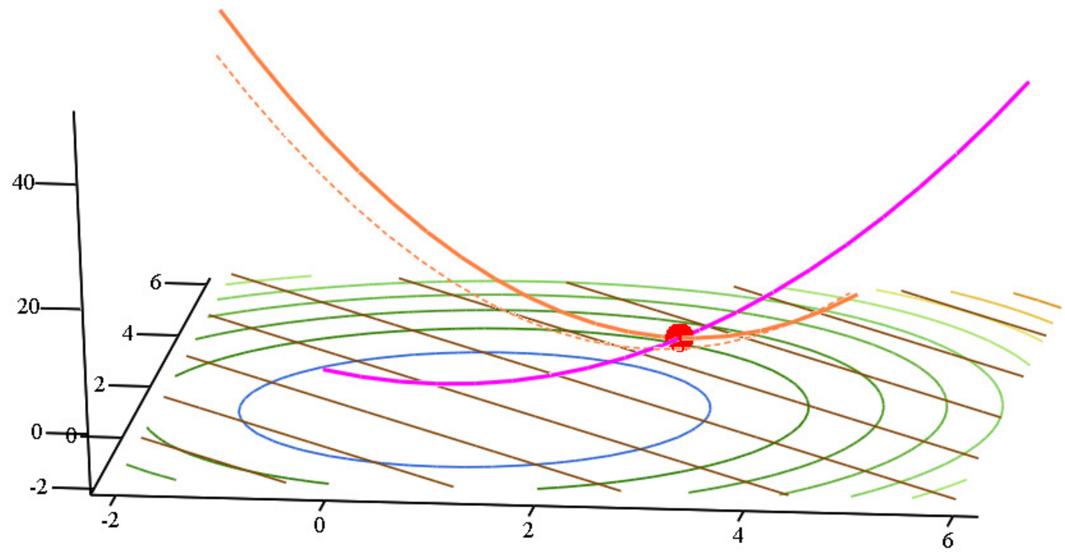
$$Plane_H := Trace_{VerticalPlane}\left(0, 6, X2_h\right)$$



f, P_1, $Line_g$, $Line_{\Delta g}$, $Line_h$



f, g, $Plane_H$, $Plane_g$, $Plane_{\Delta g}$, $P1_{Line}$



$f, P_1, Line_g, Line_{\Delta g}, Line_h, g$

Verificando os termos de segunda ordem :

$$L'(V) := \text{Change\_Input\_Format}_{\text{Field\_to\_Vector5}}\left[L, \begin{pmatrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \end{pmatrix}^T\right]$$

$$\text{eigenvals}\left(\text{Hessian}\left(L', X^{*T}\right)\right)^T = \begin{pmatrix} 2.7 & 2.7 & -0.7 & -0.7 & 4 \end{pmatrix}$$

Nem todos os autovalores da matrix Hessiana do Lagrangeano são positivos, logo, não é possível dizer se a matrix Hessiana é positiva definida e consequentemente, não é possível dizer se o ponto extremo verificado é um mínimo apesar de termos constatado gráficamente.