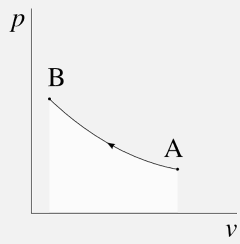
Exemple 2.3

Un gaz dans un cylindre est comprimé lentement par un piston. On observe que sa pression est liée à son volume par la relation $pv^{1,2} = k$ (en unités SI, et où k est une constante). Au début de la compression, ses propriétés sont $p_A = 1\,\text{bar}$ et $v_A = 1\,\text{m}^3\,\text{kg}^{-1}$. On le comprime jusqu'à ce que son volume ait atteint $v_B = 0{,}167\,\text{m}^3\,\text{kg}^{-1}$.
Quelle quantité de travail spécifique le gaz a-t-il fourni ou reçu ?

Sur un diagramme pression-volume et de façon qualitative, l'évolution peut être représentée ainsi :



Il nous faut d'abord calculer la valeur de k pour connaître quantitativement la relation entre p et v. Nous l'obtenons avec les conditions initiales : $k = p_A v_A^{1,2} = 10^5 \times 1^{1,2} = 10^5$ u.SI.

La grandeur de k est déroutante : elle est mesurée en $\text{Pa}\,\text{m}^{3,6}\,\text{kg}^{-1,2}$. Cela n'a pas d'importance pour nous et il nous suffit (après avoir bien converti les unités d'entrée en SI !) d'indiquer « unités SI », ou u.SI.

Maintenant, nous pouvons décrire p en fonction de v : $p = 10^5 \times v^{-1,2}$. Il n'y a plus qu'à intégrer en partant de l'équation 2/10 : $w_{A\to B} = -\int_A^B p\,\mathrm{d}v = -\int_A^B kv^{-1,2}\,\mathrm{d}v = -k\left[\frac{1}{-1{,}2+1}v^{-1,2+1}\right]_{v_A}^{v_B} = \frac{10^5}{0{,}2}\left[v^{-0,2}\right]_1^{0,167} = +2{,}152 \cdot 10^5\,\text{J}\,\text{kg}^{-1} = +215{,}2\,\text{kJ}\,\text{kg}^{-1}$.

Le signe de $w_{A\to B}$ est positif : le gaz reçoit du travail.

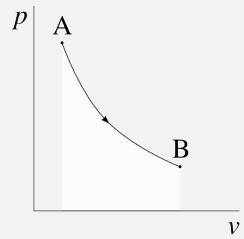
Le résultat peut paraître grand, mais il faut se rappeler que c'est un travail spécifique (§1.1.5) qu'il faudra multiplier par la masse du gaz pour obtenir une quantité en joules. Aux conditions de départ ($1\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$) un volume d'air de 1 L pèse à peine plus d'un gramme.

Exemple 2.4

Une masse de 0,3 gramme de gaz pressurisée dans un cylindre est détendue lentement en laissant un piston se déplacer. On sait que sa pression et son volume sont reliés par une relation de type $pv^{k_1} = k_2$ (où k_1 et k_2 sont deux constantes).

Au début de la détente, la pression est à 12 bar et le volume est de 0,25 L. Une fois détendu, le gaz arrive à pression ambiante de 1 bar avec un volume de 1,76 L.
Quel travail le gaz a-t-il dégagé pendant la détente ?

Sur un diagramme pression-volume et de façon qualitative, l'évolution peut être représentée ainsi :



Il nous faut d'abord connaître entièrement la loi reliant p à v ; ensuite nous procéderons à l'intégration $-\int p \, \mathrm{d}v$ pendant l'évolution pour calculer le travail.
Commençons par calculer les volumes spécifiques au départ et à l'arrivée : $v_\mathrm{A} = \frac{V_\mathrm{A}}{m} = \frac{0{,}25 \cdot 10^{-3}}{0{,}3 \cdot 10^{-3}} = 0{,}833\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}}$. De même, $v_\mathrm{B} = \frac{V_\mathrm{B}}{m} = 5{,}867\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}}$.
Maintenant, nous pouvons calculer k_1 :

$$\begin{aligned}
p_\mathrm{A} v_\mathrm{A}^{k_1} &= p_\mathrm{B} v_\mathrm{B}^{k_1} \\
\left(\frac{v_\mathrm{A}}{v_\mathrm{B}}\right)^{k_1} &= \frac{p_\mathrm{B}}{p_\mathrm{A}} \\
k_1 \ln\left(\frac{v_\mathrm{A}}{v_\mathrm{B}}\right) &= \ln\left(\frac{p_\mathrm{B}}{p_\mathrm{A}}\right) \\
k_1 &= \frac{\ln\left(\frac{p_\mathrm{B}}{p_\mathrm{A}}\right)}{\ln\left(\frac{v_\mathrm{A}}{v_\mathrm{B}}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{1}{12}\right)}{\ln\left(\frac{0{,}833}{5{,}867}\right)} = 1{,}2733
\end{aligned}$$

Et avec k_1, nous pouvons calculer $k_2 = p_\mathrm{A} v_\mathrm{A}^{k_1} = 12 \cdot 10^5 \times 0{,}833^{1{,}2733} = 9{,}514 \cdot 10^5$ u.SI.

👉 k_1 est un exposant et n'a pas d'unités. Les unités de k_2 ne nous intéressent pas.

👉 Même si elle peut paraître laborieuse, cette démarche « nous avons un modèle général pour la tendance, quels sont les paramètres pour ce cas particulier ? » est très courante en physique, et extrêmement utile pour l'ingénieur/e.

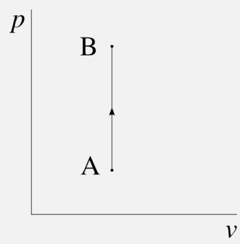
Nous savons maintenant décrire quantitativement les propriétés pendant l'évolution : $pv^{1{,}2733} = 9{,}514 \cdot 10^5$. Il n'y a plus qu'à effectuer notre intégration habituelle : $w_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = -\int_\mathrm{A}^\mathrm{B} p \, \mathrm{d}v = -k_2 \int_\mathrm{A}^\mathrm{B} v^{-k_1} \, \mathrm{d}v = \frac{-9{,}514 \cdot 10^5}{-0{,}2733} \left[v^{-0{,}2733}\right]_{0{,}833}^{5{,}867} = -1{,}513 \cdot 10^6\,\mathrm{J\,kg^{-1}} = -1\,513\,\mathrm{kJ\,kg^{-1}}$. Nous multiplions par la masse de gaz pour obtenir le travail : $W_{A\to B} = m\, w_{A\to B} = -453{,}8\,\text{J}$.

☞ Ce calcul peut être effectué de façon plus rapide, sans calculer les valeurs de v_A, v_B et k_2. Toutefois, pour être certain/e de parvenir au résultat, il est plus sûr et plus facile de quantifier p et v (en SI) à tous les stades de l'évolution avant de débuter une intégration.

Exemple 2.5

Un gaz enfermé dans un réservoir hermétique est chauffé lentement. Son volume reste bloqué à 12 L, et sa pression évolue de 1 bar jusqu'à 40 bar. Quel est le travail développé ?

Sur un diagramme pression-volume et de façon qualitative, l'évolution peut être représentée ainsi :



Le travail est nul, bien sûr. Le volume ne changeant pas, $\mathrm{d}V$ est nul pendant toute l'évolution. Nous pouvons chauffer ou refroidir à loisir, mais tant qu'aucune paroi n'est déplacée, il n'y aura pas de transfert de travail.

2.4.3 Travail d'un fluide en évolution rapide

Les choses se compliquent lorsque nous comprimons et détendons notre fluide de façon rapide (figure 2.11). Il se produit alors un phénomène complexe et d'importance critique en thermodynamique : **la pression sur la paroi est différente de la « pression moyenne » à l'intérieur du fluide**.

« Nous avons dit qu'à l'origine du mouvement l'équilibre de pression s'établit entre la chaudière et le cylindre, mais à mesure que la vitesse du piston s'accroît, celui-ci fuit en quelque sorte devant la vapeur sans lui donner le temps d'établir cet équilibre, et la pression dans le cylindre baisse nécessairement. »

François-Marie Guyonneau de Pambour, 1835
Traité théorique et pratique des machines locomotives [6]

Pour décrire ce qui se passe à l'intérieur du fluide, nous pouvons prendre l'exemple de l'eau d'une baignoire que l'on pousse avec les mains – comme l'objet représenté en figure 2.12 qui est déplacé dans de l'eau liquide. Lorsque l'objet est éloigné et rapproché brutalement, la pression sur ses parois n'est pas la même que lorsqu'il est déplacé lentement.