

Comportements élastique et viscoélastique des composites

par **Yvon CHEVALIER**

Docteur ès Sciences

Maître de Conférences à l'Institut Supérieur des Matériaux et de la Construction Mécanique (ISMCM)

1. Comportement élastique linéaire. Loi de Hooke	A 7 750 - 4
1.1 Tenseurs des rigidités et des souplesses.....	— 4
1.2 Constantes d'élasticité. Changement de repère	— 5
1.2.1 Modules d'élasticité techniques	— 5
1.2.2 Changement de repère.....	— 6
1.3 Divers degrés de symétrie matérielle des matériaux composites	— 7
1.3.1 Matériaux orthotropes	— 7
1.3.2 Matériaux quasi isotropes transverses. Système tétragonal.....	— 8
1.3.3 Matériaux isotropes transverses. Système hexagonal	— 9
1.3.4 Matériaux quasi isotropes. Système cubique	— 9
1.3.5 Matériaux isotropes.....	— 10
1.3.6 Récapitulatif	— 10
1.4 Relations entre rigidité et souplesse d'un matériau orthotrope.....	— 10
1.5 Inégalités entre les modules d'élasticité d'un matériau orthotrope.....	— 10
1.6 Formules de changement de repère pour un matériau orthotrope	— 12
1.7 Invariants relatifs aux rigidités ou aux souplesses d'un matériau orthotrope	— 13
1.8 Élasticité plane dans un matériau orthotrope	— 15
1.9 Modules d'élasticité de quelques composites usuels	— 16
2. Comportement thermoélastique linéaire	— 17
2.1 Notions de thermodynamique des milieux continus	— 17
2.1.1 Énoncé des deux principes	— 17
2.1.2 Variables d'état internes.....	— 18
2.1.3 Dissipation et loi de Fourier	— 19
2.2 Loi de Duhamel-Neumann.....	— 20
2.3 Thermoélasticité découplée.....	— 22
2.3.1 Processus isotherme	— 22
2.3.2 Processus adiabatique	— 23
2.3.3 Processus découplé.....	— 23
3. Comportement viscoélastique linéaire	— 23
3.1 Fonctions de relaxation et de retard à la déformation	— 24
3.2 Modules complexes	— 27
3.3 Remarques	— 29
4. Comportement hygroélastique linéaire	— 30
5. Conclusion	— 32
Pour en savoir plus.....	Doc. A 7 750

Le terme *matériau composite* a longtemps été synonyme de *matériau renforcé de fibres*, mais on doit le prendre dans un sens plus général et le considérer comme une association de deux ou plusieurs phases solides conduisant à un matériau plus performant vis-à-vis de l'utilisateur qu'un matériau à un seul constituant. On bénéficie, par exemple :

- des différentes qualités de chacun des matériaux ;
- de l'augmentation des possibilités de formes par constitution de structures par moulage ;
- de l'**élimination des défauts** ;
- de la **somme de certaines propriétés** comme l'illustrent les composites à haute résistance et à haute rigidité spécifique (fibre de carbone/résine époxy, **Kevlar**/résine époxy, fibre de verre/résine époxy, etc.) utilisés en aéronautique ;
- d'un **effet synergique** (la propriété du composite est nettement supérieure à la même propriété des constituants) comme le montrent la tenue en fatigue et en température des composites fibre de céramique/matrice de céramique ou l'isolation phonique de certaines mousses poreuses.

L'usage est cependant établi d'appeler composites des matériaux comportant un très grand nombre de **fibres** disposées en **renforts** et liées sur une phase différente appelée **matrice**. Les renforts, qui sont plus ou moins orientés, confèrent au matériau ses propriétés de résistance ou de rigidité et le rendent anisotrope. La matrice, quant à elle, apporte généralement la résistance chimique, la résistance aux chocs thermiques ou mécaniques, à l'étanchéité et à la corrosion.

Le but de cet exposé est de mettre l'accent sur le **comportement anisotrope** des matériaux composites tant du point de vue mécanique (relations, contraintes, déformations) que du point de vue thermique (dilatation, capacité thermique massique, conductivité thermique), tout en considérant ces milieux comme macroscopiquement homogènes. Bien que les comportements linéaires en petites déformations soient seuls présentés, l'aspect dynamique des phénomènes sera constamment présent, cela afin de ne pas se limiter aux composites élastiques mais de prendre également en compte les **propriétés de visco-élasticité** (influence de la vitesse) et d'**hygroélasticité** (influence de l'humidité) qui sont fréquemment présentes dans cette catégorie de matériaux. Les lois de comportement seront obtenues par la thermodynamique des milieux continus qui, outre sa généralité et sa grande souplesse, offre l'avantage d'interpréter les phénomènes sous l'angle énergétique et permet d'introduire naturellement des couplages plus ou moins prononcés entre les différentes grandeurs.

Si le schéma linéaire est simple et commode pour étudier les propriétés principales des matériaux composites, il doit être employé avec discernement.

Le matériau composite est, en effet, un milieu pervers qui met souvent en défaut les approximations classiques ; la déformation de glissement (ou les contraintes de cisaillement) d'une poutre composite en flexion peut être comparable aux déformations de flexion [1] [2]. La nature de la loi de comportement mécanique d'un composite fibre de carbone/matrice de carbone, par exemple, peut varier avec la direction, ce dernier peut être élastique et linéaire dans le sens des renforts et être non linéaire voire plastique dans d'autres directions [3].

Signalons que les notions classiques de contraintes, de déformations et d'élasticité isotrope nécessaires à la bonne compréhension de cet exposé pourront être trouvées dans les ouvrages de J. Duc et D. Bellet [4], de R. M. Jones [6] et de S. W. Tsai [13]. Le lecteur pourra également consulter l'article **Essais des plastiques renforcés** [AM 5 405] du traité *Plastiques et Composites*.

Dans cet article, nous utiliserons la terminologie **isotropie transverse**, mais nous mentionnerons que certains auteurs préfèrent la notation **orthotropie de révolution**.

Les terminologies résine époxy, résine époxyde ou résine époxydique s'utilisent indifféremment.

Dans le domaine des composites, la structure des matériaux est souvent notée sous forme abrégée :

notation abrégée	notation complète
carbone/carbone } ou C/C fibre de carbone/matrice de carbone
carbone/époxy	fibre de carbone/résine époxy
carbure de silicium/aluminium } ou SiC/Al fibre de carbure de silicium/matrice d'aluminium
céramique/céramique.....	fibre de céramique/matrice de céramique
graphite /cuivre	fibre de graphite/matrice de cuivre
<i>Kevlar</i> /époxy.....	<i>Kevlar</i> /résine époxy
verre/époxy	fibre de verre/résine époxy

Nous noterons que le premier composé cité désigne la fibre et que le second désigne la résine ou la matrice.

Notations et symboles	
Symbole	Définition
$\mathbf{a} = (a_{ij})$	tenseur de compressibilité thermique
$\mathbf{b} = (b_{ij})$	tenseur de compressibilité hygrométrique
$\mathbf{c} = (c_{ijkl})$	tenseur des rigidités
$\{C\} = (C_{ij})$	matrice des rigidités de rang 6
$\{\tilde{C}(\omega)\} = (\tilde{C}_{ij}(\omega))$	matrice des rigidités complexes à la pulsation ω
C_ϵ	capacité thermique massique à déformation constante
$\mathbf{D} = (D_{ij})$	tenseur de diffusion hygrométrique
E_i	module d'Young dans la direction i avec $i = 1, 2, 3$
$\tilde{E}_i(\omega)$	module d'Young complexe à la pulsation ω dans la direction i
f	énergie libre massique
$\mathbf{f} = (f_i)$	force à distance par unité de volume
G_{ij}	module de rigidité au cisaillement dans le plan (i, j)
$\tilde{G}_{ij}(\omega)$	module de rigidité complexe au cisaillement dans le plan (i, j) à la pulsation ω
$\mathbf{J} = (j_{ijkl})$	tenseur de retard à la déformation
m	fraction massique d'eau
$\{M_\epsilon\}$	matrice de changement de repère relative aux déformations
$\{M_\sigma\}$	matrice de changement de repère relative aux contraintes
\mathbf{n}	normale extérieure unitaire à la frontière d'une structure
$[P]$	matrice de passage entre les repères (x, y, z) et (x', y', z')
$[P]^t$	matrice transposée de $[P]$ qui correspond à l'échange des lignes et des colonnes
P_r	puissance massique réversible reçue
$\mathbf{Q} = (Q_{ij})$	tenseur de rigidité de plaque ($i, j = 1, 2$)
$\mathbf{q} = (q_i)$	vecteur courant de chaleur
$\mathbf{R} = (R_{ijkl}(t))$	tenseur de relaxation
$\mathbf{s} = (s_{ijkl})$	tenseur des souplesses

Les vecteurs et plus généralement les tenseurs sont désignés par des caractères gras.

Notations et symboles	
Symbole	Définition
s	entropie massique
$\{S\} = (S_{ij})$	matrice des souplesses de rang 6
$\{\tilde{S}(\omega)\} = (\tilde{S}_{ij}(\omega))$	matrice complexe des souplesses à la pulsation ω
t	temps
T	température thermodynamique
u	énergie interne massique
$\mathbf{U} = (U_i)$	vecteur déplacement
w	densité volumique d'énergie de déformation
$\mathbf{x} = (x_i)$	coordonnées spatiales du point courant
$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_{ij})$	tenseur de dilatation thermique
$\boldsymbol{\beta} = (\beta_{ij})$	tenseur de dilatation hygrométrique
δ	angle de perte
$\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_{ij})$	tenseur des petites déformations
$\{\epsilon\}$	vecteur des petites déformations (vecteur colonne)
$\{\epsilon\}^t$	vecteur transposé de $\{\epsilon\}$ ou vecteur ligne
ϕ	dissipation volumique
ϕ_1	dissipation intrinsèque volumique
ϕ_2	dissipation thermique volumique
ω	pulsation
$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})$	tenseur des contraintes
$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_{ij})$	tenseur de conductivité thermique
$\boldsymbol{\mu} = (\mu_i)$	vecteur courant d'humidité
ν_{ij}	coefficient de Poisson : traction dans le sens i , rétrécissement dans le sens j
$\bar{\nu}_{ij}$	coefficient de Poisson en déformations planes
$\tilde{\nu}_{ij}(\omega)$	coefficient de Poisson complexe à la pulsation ω
ρ	masse volumique
$[]$	matrice carrée écrite sous la forme du tableau classique
$\{ \}$	matrice carrée écrite sous forme de vecteur

Les vecteurs et plus généralement les tenseurs sont désignés par des caractères gras.

1. Comportement élastique linéaire. Loi de Hooke

1.1 Tenseurs des rigidités et des souplesses

La loi de comportement mécanique la plus simple est celle qui traduit la proportionnalité du tenseur des contraintes $\sigma = (\sigma_{ij})$ et du tenseur des petites déformations :

$$\epsilon = (\epsilon_{ij}) \text{ avec } i, j = 1, 2, 3$$

Elle est connue sous le nom de **loi de Hooke** et elle se traduit par l'écriture tensorielle :

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl} \text{ avec } i, j = 1, 2, 3 \quad (1)$$

La **convention de l'indice muet**, qui consiste à sommer les monômes comportant deux indices identiques, sera utilisée tout au long de cet article.

Les petites déformations ϵ_{ij} sont définies, rappelons-le, à partir des déplacements $\mathbf{U} = (U_i)$ par les relations :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \text{ avec } i, j = 1, 2, 3 \quad (2)$$

le vecteur $\mathbf{x} = (x_i)$, $i = 1, 2, 3$ repérant la position spatiale du point.

En inversant la relation (1), il vient :

$$\epsilon_{ij} = s_{ijkl} \sigma_{kl} \text{ avec } i, j = 1, 2, 3 \quad (3)$$

Le **tenseur d'ordre quatre**, $\mathbf{c} = (c_{ijkl})$, est appelé le **tenseur des rigidités** et son inverse $\mathbf{s} = (s_{ijkl})$ le **tenseur des souplesses** (il est également du 4^e ordre). Ils sont liés par la relation :

$$c_{ijpq} s_{pqkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (4)$$

dans laquelle δ_{ij} , le **tenseur de Kronecker**, prend la valeur 0 si $i \neq j$ et la valeur 1 si $i = j$.

Les tenseurs des contraintes et des déformations sont des **tenseurs d'ordre deux** qui peuvent s'interpréter comme des matrices carrées de rang trois traduisant la correspondance linéaire de deux vecteurs.

Exemple : le tenseur des contraintes permet de passer du vecteur normal à une surface à la force par unité de surface, le tenseur des déformations permet de passer du vecteur à l'état naturel au vecteur à l'état déformé.

Les matrices des contraintes et des déformations s'écrivent alors :

$$[\sigma] = (\sigma_{ij}), [\epsilon] = (\epsilon_{ij}) \text{ avec } i, j = 1, 2, 3$$

Ces tenseurs (ou ces matrices) étant symétriques, ils sont définis par six scalaires indépendants et il est plus commode, dans les problèmes de calcul de structures, de les écrire sous forme de vecteurs colonne (ou ligne) de rang six. Nous utilisons alors la notation suivante :

$$\left\{ \begin{aligned} \{\sigma\} &= (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}) \\ \{\epsilon\} &= (\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, 2\epsilon_{23}, 2\epsilon_{13}, 2\epsilon_{12}) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Les lois de comportement mécanique (1) et (3) s'écrivent donc matriciellement :

$$\{\sigma\} = \{C\} \{\epsilon\} \quad (6)$$

$$\text{ou} \quad \{\epsilon\} = \{S\} \{\sigma\} \quad (7)$$

les matrices carrées de rang six $\{C\} = (C_{ij})$ et $\{S\} = (S_{ij})$ étant définies à partir des tenseurs d'ordre quatre des relations (1) et (3) par les égalités suivantes :

— pour la **matrice des rigidités** $\{C\}$:

$$\begin{array}{ccc|ccc} C_{11} = c_{1111} & C_{12} = c_{1122} & C_{13} = c_{1133} & C_{14} = c_{1123} & C_{15} = c_{1113} & C_{16} = c_{1112} \\ C_{21} = c_{2211} & C_{22} = c_{2222} & C_{23} = c_{2233} & C_{24} = c_{2223} & C_{25} = c_{2213} & C_{26} = c_{2212} \\ C_{31} = c_{3311} & C_{32} = c_{3322} & C_{33} = c_{3333} & C_{34} = c_{3323} & C_{35} = c_{3313} & C_{36} = c_{3312} \\ \hline C_{41} = c_{2311} & C_{42} = c_{2322} & C_{43} = c_{2333} & C_{44} = c_{2323} & C_{45} = c_{2313} & C_{46} = c_{2312} \\ C_{51} = c_{1311} & C_{52} = c_{1322} & C_{53} = c_{1333} & C_{54} = c_{1323} & C_{55} = c_{1313} & C_{56} = c_{1312} \\ C_{61} = c_{1211} & C_{62} = c_{1222} & C_{63} = c_{1233} & C_{64} = c_{1223} & C_{65} = c_{1213} & C_{66} = c_{1212} \end{array}$$

— pour la **matrice des souplesses** $\{S\}$:

$$\begin{array}{ccc|ccc} S_{11} = s_{1111} & S_{12} = s_{1122} & S_{13} = s_{1133} & S_{14} = s_{1123} & S_{15} = 2s_{1113} & S_{16} = 2s_{1112} \\ S_{21} = s_{2211} & S_{22} = s_{2222} & S_{23} = s_{2233} & S_{24} = s_{2223} & S_{25} = 2s_{2213} & S_{26} = 2s_{2212} \\ S_{31} = s_{3311} & S_{32} = s_{3322} & S_{33} = s_{3333} & S_{34} = 2s_{3323} & S_{35} = 2s_{3313} & S_{36} = 2s_{3312} \\ \hline S_{41} = 2s_{2311} & S_{42} = 2s_{2322} & S_{43} = 2s_{2333} & S_{44} = 4s_{2323} & S_{45} = 4s_{2313} & S_{46} = 4s_{2312} \\ S_{51} = 2s_{1311} & S_{52} = 2s_{1322} & S_{53} = 2s_{1333} & S_{54} = 4s_{1323} & S_{55} = 4s_{1313} & S_{56} = 4s_{1312} \\ S_{61} = 2s_{1211} & S_{62} = 2s_{1222} & S_{63} = 2s_{1233} & S_{64} = 4s_{1223} & S_{65} = 4s_{1213} & S_{66} = 4s_{1212} \end{array}$$

On remarquera la présence des facteurs 2 et 4 dans la matrice 6 × 6 des souplesses. Ils proviennent de la définition du vecteur $\{\epsilon\}$.

Nous avons, par exemple, d'après la relation (3) :

$$\epsilon_{12} = s_{1211} \sigma_{11} + s_{1222} \sigma_{22} + s_{1233} \sigma_{33} + 2s_{1223} \sigma_{23} + 2s_{1213} \sigma_{13} + 2s_{1212} \sigma_{12}$$

qui devient, par analogie avec la relation (7) :

$$2\epsilon_{12} = S_{61} \sigma_{11} + S_{62} \sigma_{22} + S_{63} \sigma_{33} + S_{64} \sigma_{23} + S_{65} \sigma_{13} + S_{66} \sigma_{12}$$

Les matrices des rigidités $\{C\}$ ou des souplesses $\{S\}$ s'écrivent sous la forme partagée suivante :

$$\begin{Bmatrix} \text{I} & \text{II} \\ \text{III} & \text{IV} \end{Bmatrix}$$

et les quadrants II et III des matrices des rigidités ou des souplesses induisent des couplages :

- les tractions-compressions engendrent des glissements (pour les rigidités) et réciproquement ;
- les dilatations engendrent des cisaillements (pour les souplesses) et réciproquement.

Ces phénomènes de couplage sont absents dans les milieux isotropes. Enfin, les matrices $\{S\}$ et $\{C\}$ sont inverses l'une de l'autre, c'est-à-dire :

$$\{S\} = \{C\}^{-1} \text{ ou } \{C\} = \{S\}^{-1} \quad (8)$$

Le tenseur des rigidités \mathbf{c} comporte $3^4 = 81$ composantes c_{ijkl} (il en est de même pour le tenseur des souplesses \mathbf{s}), mais il peut être représenté par un nombre moindre de composantes indépendantes lorsque l'on tient compte des symétries.

On distingue deux types de symétries :

— les **symétries générales**, qui résultent des concepts généraux de la mécanique, telles que la symétrie du tenseur des contraintes ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) et celle du tenseur des déformations ($\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$) et l'existence d'un **potentiel élastique** défini par la **densité volumique d'énergie de déformation** w :

$$w = \frac{1}{2} c_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} = \frac{1}{2} s_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \quad (9)$$

— les **symétries matérielles**, qui sont inhérentes au matériau et proviennent de la répartition des inclusions du composite, nous détaillerons ces symétries dans le paragraphe 1.3.

La notion de **potentiel élastique** traduit le fait que l'énergie mise en jeu, lorsque le système évolue d'un état initial A à un état déformé B , est **indépendante** du trajet suivi, mais dépend uniquement des états A et B .

Les symétries générales montrent donc que :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} \\ s_{ijkl} = s_{jikl} = s_{ijlk} \end{array} \right\} \quad (10)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{ijkl} = c_{klij} \\ s_{ijkl} = s_{klij} \end{array} \right\} \quad (11)$$

pour $i, j, k, l = 1, 2, 3$ et que, par conséquent, un matériau élastique anisotrope est défini par 21 modules d'élasticité indépendants.

Si les relations (10) sont prises en compte dans l'écriture matricielle (6) ou (7), les relations (11) montrent que les matrices $\{C\}$ ou $\{S\}$ sont symétriques, c'est-à-dire :

$$C_{ij} = C_{ji} \quad \text{et} \quad S_{ij} = S_{ji}$$

La relation (9) s'écrit aussi matriciellement :

$$\left. \begin{array}{l} w_\epsilon(\epsilon) = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^t \{C\} \{\epsilon\} \\ w_\sigma(\sigma) = \frac{1}{2} \{\sigma\}^t \{S\} \{\sigma\} \end{array} \right\} \Leftrightarrow w = \frac{1}{2} \{\sigma\}^t \{\epsilon\} \quad (12)$$

Remarque : $\{\epsilon\}^t$ est le vecteur transposé de $\{\epsilon\}$ ou vecteur ligne, $\{\epsilon\}$ étant alors un vecteur colonne.

Les systèmes élastiques sont des systèmes stables et la densité volumique d'énergie de déformation w est positive, si bien que les matrices $\{C\}$ et $\{S\}$ sont positives (12). Leurs valeurs propres sont positives, ce qui permet de montrer, par exemple, que les coefficients de Poisson peuvent excéder 0,5 dans les milieux anisotropes. D'une manière générale, la positivité des valeurs propres des matrices d'élasticité fournit des inégalités satisfaites par les modules d'élasticité (§ 1.7).

1.2 Constantes d'élasticité. Changement de repère

1.2.1 Modules d'élasticité techniques

Il s'agit ici de constantes d'élasticité utilisées dans l'industrie. Elles sont liées aux essais de caractérisation les plus connus en mécanique des milieux isotropes : l'essai de traction et l'essai de torsion sur les tiges ou sur les poutres.

Pour fixer les idées, considérons un **essai de traction simple** dans la direction 1. L'état des contraintes étant supposé uniaxial :

$$\{\sigma\} = (\sigma, 0, 0, 0, 0, 0)$$

la loi de comportement (7) ainsi que l'analogie avec les corps isotropes montrent que, en divisant respectivement les lignes de $\{S\}$ par $E_1, E_2, E_3, G_{23}, G_{13}, G_{12}$, la déformation $\{\epsilon\}$ vaut :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{11} = S_{11} \sigma = \frac{\sigma}{E_1} \\ \epsilon_{22} = S_{21} \sigma = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma \\ \epsilon_{33} = S_{31} \sigma = -\frac{\nu_{31}}{E_3} \sigma \\ 2\epsilon_{23} = S_{41} \sigma = \frac{\eta_{1,23}}{G_{23}} \sigma \\ 2\epsilon_{13} = S_{51} \sigma = \frac{\eta_{1,13}}{G_{13}} \sigma \\ 2\epsilon_{12} = S_{61} \sigma = \frac{\eta_{1,12}}{G_{12}} \sigma \end{array} \right.$$

Les modules d'élasticité introduits sont les suivants :

- E_i **module d'Young** dans la direction $i = 1, 2, 3$;
- ν_{ij} **coefficient de Poisson** $i, j = 1, 2, 3$ avec $i \neq j$;
- G_{ij} **module de Coulomb** ou **de rigidité au cisaillement** dans le plan (i, j) $i, j = 1, 2, 3$ avec $i \neq j$;
- $\eta_{i, ij}$ **coefficient de Lekhnitskii** ou d'influence mutuelle (peu utilisé dans le domaine des composites).

Le rapport du rétrécissement relatif ϵ_{22} à l'allongement relatif ϵ_{11} vaut, compte tenu de la symétrie de la matrice des souplesses énoncée dans la relation (11) :

$$-\frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{11}} = \frac{\nu_{21}}{E_2} E_1 = \nu_{12} \quad \left(\text{car } S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = S_{21} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \right)$$

ν_{12} et ν_{13} traduisent donc respectivement les rapports des rétrécissements relatifs dans les directions 2 et 3 à l'allongement relatif dans la direction 1.

Les modules de Coulomb apparaissent dans un essai de cisaillement simple. Dans le plan (1, 2), nous prenons, par exemple, l'état de contrainte suivant :

$$\{\sigma\} = \{0, 0, 0, 0, 0, \tau\}$$

D'après la relation (7), le tenseur des déformations vaut alors, en divisant respectivement les lignes de $\{S\}$ par $E_1, E_2, E_3, G_{23}, G_{13}, G_{12}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{11} = S_{16} \tau = \frac{\eta_{12,1}}{E_1} \\ \epsilon_{22} = S_{26} \tau = \frac{\eta_{12,2}}{E_2} \\ \epsilon_{33} = S_{36} \tau = \frac{\eta_{12,3}}{E_3} \\ 2\epsilon_{23} = S_{46} \tau = \frac{\mu_{12,23}}{G_{23}} \\ 2\epsilon_{13} = S_{56} \tau = \frac{\mu_{12,13}}{G_{13}} \\ 2\epsilon_{12} = S_{66} \tau = \frac{\tau}{G_{12}} \end{array} \right.$$

avec G_{12} **module de Coulomb** ou de rigidité au cisaillement dans le plan (1, 2),

$\mu_{12,ij}$ **coefficient de Chentsov** ou d'influence mutuelle (peu usité dans le domaine des composites).

D'une manière générale, la **matrice des souplesses techniques** est définie par les modules d'élasticité suivants :

— **modules d'Young** E_i :

$$S_{ii} = \frac{1}{E_i} \text{ avec } i = 1, 2, 3 \quad (13)$$

— **coefficients de Poisson** ν_{ij} :

$$S_{ij} = -\frac{\nu_{ij}}{E_i} = S_{ji} = -\frac{\nu_{ji}}{E_j} \text{ avec } i, j = 1, 2, 3 \text{ et } i \neq j \quad (14)$$

où ν_{ij} représente la traction dans le sens i et le rétrécissement dans le sens j ,

ces coefficients de Poisson sont positifs et peuvent excéder 0,5 ;

— **modules de Coulomb** ou de rigidité au cisaillement G_{ij} :

$$S_{pp} = \frac{1}{G_{ij}} \text{ avec } p = 9 - (i + j), \quad i, j = 1, 2, 3 \text{ et } i \neq j \quad (15)$$

L'écriture la plus naturelle et la plus commode en calcul des structures de la loi de comportement est celle qui utilise soit la **matrice des rigidités**, soit la **matrice des souplesses**. Il est cependant plus pratique de caractériser un matériau élastique par ses *soulesses techniques* définies par les relations (13), (14) et (15).

Les modules d'Young s'obtiennent par identification des trois termes définis par la relation (13). On prendra bien garde de ne pas confondre le module d'Young E_i avec la composante C_{ij} de la matrice des rigidités :

$$C_{ii} \neq E_i$$

Le **coefficient de Poisson** ν_{ij} traduit le rapport du rétrécissement relatif dans la direction j à l'allongement relatif dans la direction i . Il peut être supérieur à 0,5, voir les exemples du paragraphe 1.3 et du tableau 8.

Enfin, on ne confondra pas (sauf cas particuliers) le **module de Coulomb** ou de **rigidité au cisaillement** G_{ij} , obtenu par identification des trois termes définis par la relation (15), avec le module correspondant de **rigidité au glissement**. Dans le cas d'un glissement et d'un cisaillement dans le plan (2, 3) par exemple, nous avons en général :

$$C_{44} \neq G_{23}$$

Cette différence provient du fait que, en élasticité anisotrope, un cisaillement n'entraîne pas uniquement un glissement, mais aussi une dilatation et réciproquement. Une étude complète de l'élasticité anisotrope est présentée dans l'ouvrage de Lekhnitskii [5].

1.2.2 Changement de repère

Les caractéristiques du matériau anisotrope sont exprimées dans le repère (x, y, z) ou $(1, 2, 3)$ et l'on se propose de travailler dans un repère (x', y', z') plus naturel ou plus commode pour analyser une structure donnée. Cette situation se rencontre, par exemple, lors de l'étude d'une poutre en matériau carbone/époxy unidirectionnel (figure 1a) ou d'une coque cylindrique verre/époxy renforcée par enroulements filamenteux hélicoïdaux (figure 1b) et nous devons connaître les lois de variation des modules d'élasticité en fonction du repère.

D'une manière générale, désignons par $[P] = (P_{ij})$ la matrice de passage entre les repères (x, y, z) et (x', y', z') :

$$[P] = \begin{bmatrix} x' & y' & z' \\ P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}$$

les trois colonnes de la matrice $[P]$ étant respectivement les coordonnées des vecteurs x', y' et z' dans le repère (x, y, z) . Pour une rotation d'angle α autour de z par exemple, la matrice $[P]$ possède la forme indiquée dans la figure 2.

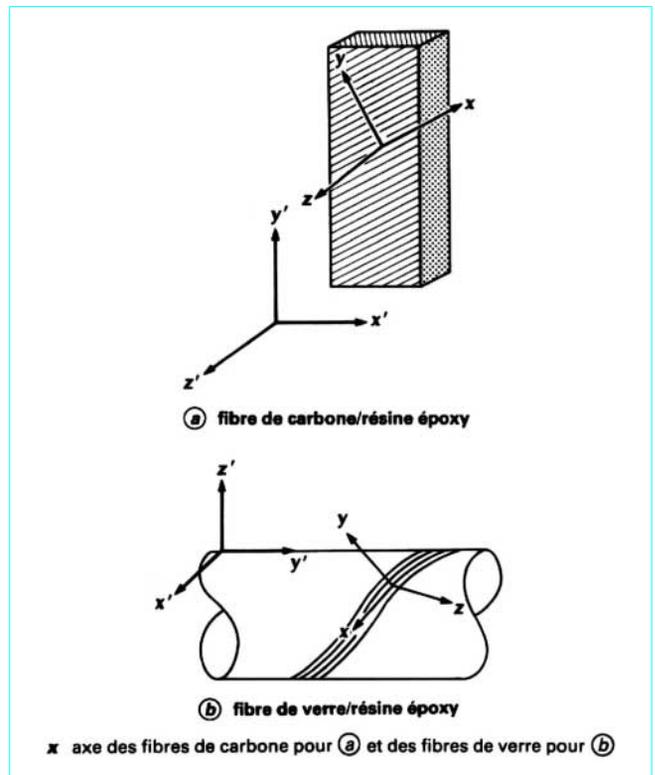


Figure 1 – Poutre en matériau unidirectionnel et désaxé (a) et coque cylindrique renforcée par des enroulements filamenteux hélicoïdaux (b)

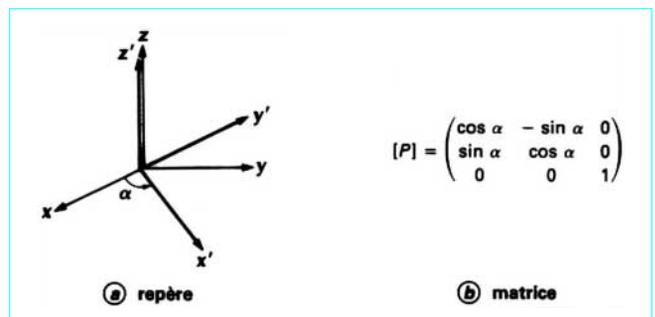


Figure 2 – Rotation autour de l'axe z

La matrice $[P]$ est orthogonale, c'est-à-dire que les vecteurs colonne (ou ligne) sont orthonormés et donc :

$$[P]^{-1} = [P]^t \quad (P^{-1})_{ij} = P_{ji} \quad (16)$$

Remarque : $[P]^t$ est la matrice transposée de $[P]$ et correspond à l'échange des lignes et des colonnes.

La loi de changement de base des matrices carrées se traduit sur les composantes σ'_{ij} et ϵ'_{ij} des tenseurs des contraintes et des déformations dans le repère (x', y', z') par les relations :

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_{ij} &= P_{ki} P_{lj} \sigma_{kl} \Leftrightarrow \sigma_{ij} = P_{ik} P_{jl} \sigma'_{kl} \\ \epsilon'_{ij} &= P_{ki} P_{lj} \epsilon_{kl} \Leftrightarrow \epsilon_{ij} = P_{ik} P_{jl} \epsilon'_{kl} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

En exprimant la loi de comportement (1) dans les repères (x, y, z) ou (x', y', z') ainsi que $[\sigma]$ et $[\epsilon]$ en fonction de $[\sigma']$ et $[\epsilon']$, on aboutit pour le tenseur des rigidités \mathbf{c} à la loi de changement de repère suivante :

$$c'_{ijkl} = c_{pqrs} P_{pi} P_{qj} P_{rk} P_{sl} \quad c_{ijkl} = c'_{pqrs} P_{ip} P_{jq} P_{kr} P_{ls} \quad (18)$$

qui est caractéristique des tenseurs d'ordre quatre. Le tenseur des souplesses \mathbf{s} défini par la relation (3) suit une loi de changement de repère analogue à (18). Les relations tensorielles (18) sont lourdes et peu commodes et il est d'usage de les traduire sur les vecteurs des contraintes et des déformations, et sur les matrices des rigidités et des souplesses définis par les égalités (6) et (7). Les premières séries d'égalités (17) s'écrivent aussi matriciellement :

$$\left\{ \begin{aligned} \{\sigma'\} &= \{M_\sigma\} \{\sigma\} \\ \{\epsilon'\} &= \{M_\epsilon\} \{\epsilon\} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

relations dans lesquelles les matrices de passage $\{M_\sigma\}$ et $\{M_\epsilon\}$ sont des matrices de rang six ayant la structure suivante :

$$\{M_\sigma\} = \begin{Bmatrix} [D_1] & 2[A] \\ [B] & [D_2] \end{Bmatrix} ; \quad \{M_\epsilon\} = \begin{Bmatrix} [D_1] & [A] \\ 2[B] & [D_2] \end{Bmatrix} \quad (20)$$

Dans les égalités (20), les sous-matrices carrées de rang trois, $[A]$, $[B]$, $[D_1]$ et $[D_2]$ ont pour expression :

$$\begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} P_{21} P_{31} & P_{11} P_{31} & P_{11} P_{21} \\ P_{22} P_{32} & P_{12} P_{32} & P_{12} P_{22} \\ P_{23} P_{33} & P_{13} P_{33} & P_{13} P_{23} \end{bmatrix} \\ [B] &= \begin{bmatrix} P_{12} P_{13} & P_{22} P_{23} & P_{32} P_{33} \\ P_{11} P_{13} & P_{21} P_{23} & P_{31} P_{33} \\ P_{11} P_{12} & P_{21} P_{22} & P_{31} P_{32} \end{bmatrix} \\ [D_1] &= \begin{bmatrix} P_{11}^2 & P_{21}^2 & P_{31}^2 \\ P_{12}^2 & P_{22}^2 & P_{32}^2 \\ P_{13}^2 & P_{23}^2 & P_{33}^2 \end{bmatrix} \\ [D_2] &= \begin{bmatrix} P_{22} P_{33} + P_{32} P_{23} & P_{12} P_{33} + P_{32} P_{13} & P_{12} P_{23} + P_{22} P_{13} \\ P_{21} P_{33} + P_{31} P_{23} & P_{11} P_{33} + P_{31} P_{13} & P_{11} P_{23} + P_{21} P_{13} \\ P_{21} P_{32} + P_{31} P_{22} & P_{11} P_{32} + P_{31} P_{12} & P_{11} P_{22} + P_{21} P_{12} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Les relations de changement de base (17) permettent de lier les matrices de rang six $\{M_\sigma\}$ et $\{M_\epsilon\}$ et leur inverse par les égalités suivantes :

$$\{M_\sigma\}^{-1} = \{M_\epsilon\}^t = \begin{bmatrix} [D_1]^t & 2[B]^t \\ [A]^t & [D_2]^t \end{bmatrix} \quad \{M_\epsilon\}^{-1} = \{M_\sigma\}^t = \begin{bmatrix} [D_1]^t & [B]^t \\ 2[A]^t & [D_2]^t \end{bmatrix} \quad (21)$$

Il faut bien noter que les matrices $\{M_\sigma\}$ et $\{M_\epsilon\}$ sont différentes, la cause étant la présence du facteur 2 dans les termes de glissement du vecteur colonne $\{\epsilon\}$ [relation (5)].

En écrivant matriciellement les relations de changement de base (17) :

$$\left\{ \begin{aligned} \{\sigma'\} &= \{M_\sigma\} \{\sigma\} & \{\sigma\} &= \{M_\epsilon\}^t \{\sigma'\} \\ \{\epsilon'\} &= \{M_\epsilon\} \{\epsilon\} & \{\epsilon\} &= \{M_\sigma\}^t \{\epsilon'\} \end{aligned} \right.$$

et en tenant compte des relations matricielles de comportement mécanique (6) et (7) écrites dans les repères (x, y, z) et (x', y', z') , il vient :

$$\left\{ \begin{aligned} \{C'\} &= \{M_\sigma\} \{C\} \{M_\sigma\}^t \quad \text{ou} \quad \{C\} = \{M_\epsilon\}^t \{C'\} \{M_\epsilon\} \\ \{S'\} &= \{M_\epsilon\} \{S\} \{M_\epsilon\}^t \quad \text{ou} \quad \{S\} = \{M_\sigma\}^t \{S'\} \{M_\sigma\} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Les relations (22) traduisent les lois de changement de repère pour les matrices des rigidités et des souplesses d'un matériau élastique. Ces égalités matricielles sont une forme exploitable des relations tensorielles (18) qui sont à l'origine de toute écriture matricielle de changement de base des tenseurs d'ordre quatre (6).

Exemple de la rotation autour de l'axe z : la matrice de passage $[P]$ est définie sur la figure 2, si bien que les sous-matrices figurant dans les matrices de passage $\{M_\sigma\}$ et $\{M_\epsilon\}$ ont pour expression :

$$\begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sin \alpha \cos \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha \cos \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [B] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha \cos \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & 0 \end{bmatrix} \\ [D_1] &= \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & 0 \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ [D_2] &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \cos 2\alpha \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1.3 Divers degrés de symétrie matérielle des matériaux composites

Compte tenu de leur texture ou de la position des renforts, les matériaux composites possèdent divers degrés de symétrie matérielle que l'on peut ranger en cinq catégories.

1.3.1 Matériaux orthotropes

Ce sont des matériaux qui possèdent deux plans de symétrie orthogonaux.

Considérons, par exemple, une symétrie par rapport au plan $(1, 2)$ ou (x, y) et effectuons le changement de repère correspondant à

cette symétrie (l'axe z est transformé en son opposé). La matrice de passage [P] possède la forme diagonale suivante :

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

si bien que les matrices $\{M_\sigma\}$ et $\{M_\epsilon\}$ qui sont définies par les relations (20) sont diagonales et identiques, chaque terme diagonal étant égal à 1, sauf le 4^e et le 5^e terme qui valent - 1. La postmultiplication de la matrice des rigidités par $\{M_\sigma\}^t$ change les signes des 4^e et 5^e colonnes de cette dernière, tandis que la prémultiplication par $\{M_\sigma\}$ change le signe des 4^e et 5^e lignes. Il résulte alors des relations (22) que :

$$\{C'\} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & -C_{14} & -C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & -C_{24} & -C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & -C_{34} & -C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & -C_{46} \\ & & & \text{sym.} & C_{55} & -C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}$$

Le matériau est supposé invariant par symétrie par rapport au plan (1, 2), $\{C'\} = \{C\}$. L'égalité précédente montre donc que dans le repère (x, y, z), ou repère d'orthotropie, la matrice des rigidités a la forme suivante :

$$\{C\} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & & & \text{sym.} & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (23)$$

On reconnaît dans la relation (23) la structure d'un **matériau monoclinique**. Une deuxième symétrie par rapport au plan (2, 3) ou (y, z), par exemple, montre, par un raisonnement analogue, que la matrice des rigidités d'un matériau orthotrope est de la forme suivante :

$$\{C\} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & \text{sym.} & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (24)$$

D'après l'identité (24), on constate qu'un **matériau orthotrope comporte trois plans de symétrie orthogonaux et est caractérisé élastiquement par neuf modules indépendants**.

Signalons que la structure de la matrice des souplesses est identique à celle de la matrice des rigidités. Nous donnerons au paragraphe 1.4 quelques formules générales utiles à l'analyse des matériaux orthotropes.

Un des matériaux orthotropes (et composites) les plus anciens est le bois (à condition de se placer assez loin de l'axe du tronc). La figure 3 présente la matrice de rigidité du pin de Douglas [7].

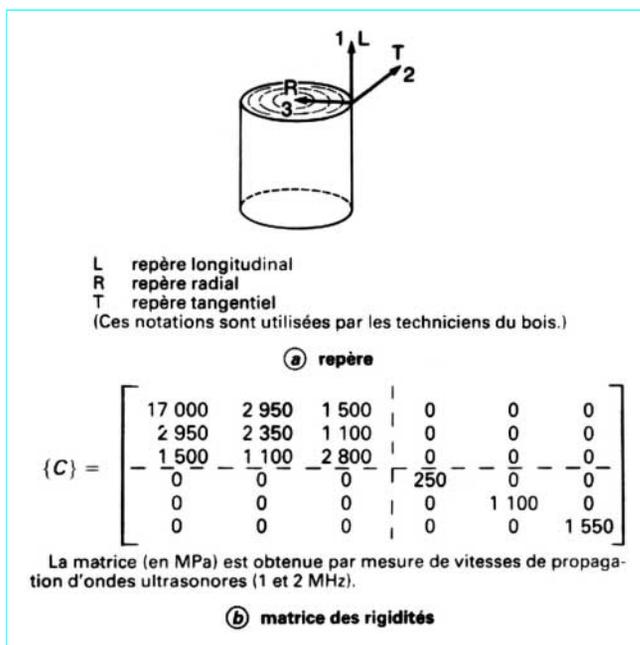


Figure 3 - Matrice de rigidité du pin de Douglas (d'après [7])

L'aubier étant plus tendre que le cœur, il s'agit de valeurs moyennes. Les modules d'élasticité techniques de ce pin de Douglas, obtenus par inversion de la matrice des rigidités {C} et identification par les égalités (13), (14) et (15), sont les suivants :

$$\begin{aligned} E_1 &= 13\,300 \text{ MPa} & E_2 &= 1\,550 \text{ MPa} & E_3 &= 2\,280 \text{ MPa} \\ \nu_{12} &= 1,23 & \nu_{13} &= 0,052 & \nu_{23} &= 0,314 \\ \nu_{21} &= 0,145 & \nu_{31} &= 0,009 & \nu_{32} &= 0,456 \\ G_{23} &= 250 \text{ MPa} & G_{13} &= 1\,100 \text{ MPa} & G_{12} &= 1\,550 \text{ MPa} \end{aligned}$$

1.3.2 Matériaux quasi isotropes transverses. Système tétragonal

Ce sont des matériaux orthotropes invariants par rotation de 90° autour d'un axe et d'un seul du repère d'orthotropie.

Si la rotation de 90° a lieu autour de l'axe 3, par exemple, les axes 2 et 1 sont équivalents. La matrice des rigidités donnée par la relation (24) se simplifie pour devenir :

$$\{C\} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & \text{sym.} & C_{44} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Signalons que l'on retrouve ce résultat en effectuant un changement de repère correspondant à une rotation $\pi/4$ autour de l'axe 3.

Un matériau quasi isotrope transverse est caractérisé par six modules d'élasticité indépendants.

Un tissu carbone/époxy, par exemple, est un matériau quasi isotrope transverse si la chaîne du tissu est équivalente à la trame (taffetas ou tissu équilibré). Si le plan de quasi-isotropie est le plan du tissu ou plan (1, 2), la matrice des rigidités est donnée à la figure 4.

La matrice des souplesses techniques est alors définie par les constantes techniques suivantes :

$$E_1 = E_2 = 57\,800 \text{ MPa} \quad E_3 = 6\,900 \text{ MPa}$$

$$\nu_{12} = \nu_{21} = 0,025 \quad \nu_{13} = \nu_{23} = 0,585 \quad \nu_{31} = \nu_{32} = 0,070$$

$$G_{23} = G_{13} = 3\,300 \text{ MPa} \quad G_{12} = 18\,000 \text{ MPa}$$

1.3.3 Matériaux isotropes transverses. Système hexagonal

Ce sont des matériaux orthotropes invariants par rotation d'angle quelconque autour d'un des axes du repère d'orthotropie. Le plan perpendiculaire à cet axe est un plan d'isotropie. Le matériau est évidemment quasi isotrope transverse et sa matrice des rigidités à la structure donnée par la relation (25). Si nous effectuons une rotation d'angle α , nous devons vérifier de plus la relation suivante déduite du tableau 4 (p. 12) lorsque $C_{11} = C_{22}$:

$$C_{66} = 2(C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \sin^2\alpha \cos^2\alpha + C_{66}$$

Cela implique donc la **relation d'isotropie transverse** suivante :

$$C_{66} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \tag{26}$$

La matrice des rigidités d'un corps isotrope transverse a donc la structure suivante lorsque l'axe d'isotropie est l'axe 3 :

$$\{C\} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym.} & C_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & = C_{66} \end{bmatrix} \tag{27}$$

Un matériau isotrope transverse est un matériau orthotrope qui comporte un axe ou un plan d'isotropie. Il est caractérisé par cinq modules d'élasticité indépendants.

Remarque : la matrice des souplesses a la même structure que la matrice des rigidités, mais on se gardera de confondre la relation d'isotropie transverse relative aux souplesses avec la relation (26). En effet, d'après le tableau 5 (p. 13), un matériau isotrope transverse vérifie la relation classique d'élasticité isotrope :

$$S_{66} = 2(S_{11} - S_{12}) \Leftrightarrow G_{12} = \frac{E_1}{2(1 + \nu_{12})} \tag{28}$$

Les matériaux isotropes transverses les plus courants sont les composites à fibres unidirectionnelles *régulièrement* réparties et pour lesquels l'axe d'isotropie est l'axe des fibres.

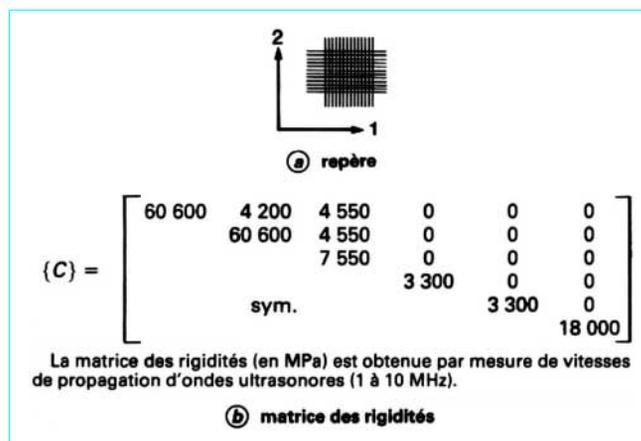


Figure 4 – Matrice de rigidité d'un tissu haute résistance, fibre de carbone/résine époxy, comportant 56 % de fibres en volume

Citons, par **exemple**, la matrice des rigidités d'un composite unidirectionnel performant, fibre de verre/résine époxy, comportant environ 65 % de fibres en volume. Cette matrice des rigidités (en MPa), dont l'axe des fibres est 3, est la suivante :

$$\{C\} = \begin{bmatrix} 22\,900 & 9\,900 & 4\,000 & 0 & 0 & 0 \\ & 22\,900 & 4\,000 & 0 & 0 & 0 \\ & & 59\,900 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & 7\,250 & 0 & 0 \\ & & & & 7\,250 & 0 \\ & & & & & 6\,500 \end{bmatrix}$$

Les modules d'élasticité techniques de ce composite ont les valeurs suivantes :

$$E_1 = E_2 = 18\,500 \text{ MPa} \quad E_3 = 58\,900 \text{ MPa}$$

$$\nu_{12} = \nu_{21} = 0,425 \quad \nu_{13} = \nu_{23} = 0,038 \quad \nu_{31} = \nu_{32} = 0,122$$

$$G_{23} = G_{13} = 7\,250 \text{ MPa} \quad G_{12} = 6\,500 \text{ MPa}$$

Nous noterons que, **en aéronautique, l'axe des fibres est habituellement l'axe 1.**

1.3.4 Matériaux quasi isotropes. Système cubique

Ce sont des matériaux orthotropes invariants par rotation de 90° autour de l'un quelconque des axes du repère d'orthotropie. Les trois axes sont donc équivalents et la matrice des rigidités (27) se simplifie pour prendre la forme :

$$\{C\} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{44} & 0 \\ & & & & & C_{44} \end{bmatrix} \tag{29}$$

Un matériau quasi isotrope est caractérisé par trois modules d'élasticité indépendants.

Un composite 3D (trois directions orthogonales de renforts par exemple) à fibres de carbone et matrice de carbone est un matériau quasi isotrope.

1.3.5 Matériaux isotropes

Ce sont des matériaux invariants quel que soit le changement de repère, toutes les directions sont donc identiques. Chaque plan étant un plan d'isotropie, la matrice des rigidités a la structure donnée par l'égalité (29), C_{44} vérifiant, en outre, la relation d'isotropie (26) :

$$C_{44} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2}$$

On écrit traditionnellement la matrice des rigidités $\{C\}$ sous la forme :

$$\{C\} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{sym.} & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix}$$

dans laquelle λ et μ sont les modules de Lamé (μ est aussi le module de rigidité au cisaillement G). La matrice des souplesses a la structure suivante :

$$\{S\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{2(1+\nu)}{E} = \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ & & & \text{sym.} & \frac{2(1+\nu)}{E} = \frac{1}{G} & 0 \\ & & & & & \frac{2(1+\nu)}{E} = \frac{1}{G} \end{bmatrix}$$

dans laquelle E est le module d'Young, ν le coefficient de Poisson et G le module de rigidité au cisaillement ou module de Coulomb ($G = \mu$).

Bon nombre de métaux, d'alliages ou de composites constitués de renforts répartis aléatoirement (composites à fibres courtes par exemple) répondent au schéma élastique isotrope.

1.3.6 Récapitulatif

Le tableau 1 récapitule les symétries matérielles rencontrées dans les matériaux composites usuels.

1.4 Relations entre rigidité et souplesse d'un matériau orthotrope

La matrice des souplesses $\{S\}$ étant l'inverse de la matrice des rigidités $\{C\}$, la relation (8) se traduit par le tableau 2 pour un corps orthotrope.

Ce tableau permet également d'obtenir les constantes techniques en fonction des rigidités. La permutation des symboles S et C dans le tableau permet d'exprimer la matrice des rigidités en fonction de la matrice des souplesses et, par voie de conséquence, en fonction des constantes techniques, comme le montre le tableau 3 (p. 12).

1.5 Inégalités entre les modules d'élasticité d'un matériau orthotrope

Nous avons vu au paragraphe 1.1 que les systèmes élastiques sont des systèmes stables, c'est-à-dire que l'énergie de déformation nécessaire pour passer de l'état naturel à l'état déformé est positive. Donc, d'après les relations (12), les matrices des rigidités et des souplesses sont positives.

Cette remarque peut être exploitée de deux manières :

— en exprimant, d'une part, les **conditions nécessaires de positivité des matrices**, qui se traduisent pour les rigidités $\{C\}$ et les souplesses $\{S\}$ par :

$$C_{ij}^2 < C_{ii} C_{jj} \text{ ou } S_{ij}^2 < S_{ii} S_{jj} \text{ avec } i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (30)$$

ou pour les modules d'élasticité techniques par :

$$1 - \nu_{ij} \nu_{ji} > 0 \text{ avec } i, j = 1, 2, 3 \quad i \neq j \quad (31)$$

ou encore par :

$$\frac{1}{E_i E_j} > \frac{\nu_{ij} \nu_{ji}}{E_i E_j} = \frac{\nu_{ij}^2}{E_i^2}$$

soit :

$$\nu_{ij}^2 < \frac{E_i}{E_j} \text{ avec } i, j = 1, 2, 3 \quad (32)$$

— en utilisant, d'autre part, les **conditions nécessaires et suffisantes de positivité des matrices**, c'est-à-dire la positivité de leurs valeurs propres ; les déterminants ΔC (tableau 2) et ΔS (tableau 3) sont respectivement les produits des valeurs propres des rigidités ou des souplesses, ils sont donc positifs ; en appliquant ce résultat à la matrice des souplesses définie par les constantes techniques, il vient :

$$1 - \nu_{12} \nu_{21} - \nu_{23} \nu_{32} - \nu_{31} \nu_{13} - 2 \nu_{21} \nu_{32} \nu_{13} > 0$$

Cette relation peut aussi s'écrire :

$$\nu_{21} \nu_{32} \nu_{13} < \frac{1 - \nu_{12} \nu_{21} - \nu_{23} \nu_{32} - \nu_{31} \nu_{13}}{2} < \frac{1}{2}$$

puisque les nombres de Poisson sont positifs (une traction engendre latéralement un rétrécissement). On obtient finalement :

$$\nu_{12} \nu_{23} \nu_{31} = \nu_{21} \nu_{32} \nu_{13} < \frac{1}{2} \quad (33)$$

Dans le cas des matériaux isotropes transverses, l'équation aux valeurs propres s'exprime comme le produit de quatre binômes du premier degré par un trinôme du second degré. Si le plan de quasi-isotropie, par exemple, est le plan (1, 2), les valeurs propres de la matrice des rigidités $\{C\}$ sont positives si et seulement si :

$$\left. \begin{aligned} C_{11} > C_{12} \\ C_{44} = C_{55} > 0 \\ C_{11} + C_{12} + C_{33} > 0 \\ C_{11} + C_{12} > \frac{2C_{13}^2}{C_{33}} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

On obtient des relations analogues à la relation (34) pour les souplesses en substituant le symbole S à C . Les deux dernières inégalités de la relation (34) se traduisent sur les modules techniques par les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \nu_{12} < 1 + \frac{E_1}{E_3} \\ \nu_{13} \nu_{31} < \frac{1 - \nu_{12}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Tableau 1 – Récapitulatif des symétries matérielles rencontrées dans les matériaux composites usuels

Matériaux	Matrice des rigidités	Modules d'élasticité techniques	Nombre de modules indépendants
Orthotrope	$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}$	E_1, E_2, E_3 $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$ $G_{23} = C_{44}, G_{13} = C_{55}$ $G_{12} = C_{66}$	9
Quasi isotrope transverse (axes 1 et 2 équivalents)	$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & C_{44} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}$	$E_1 = E_2, E_3$ $\nu_{12} = \nu_{21}, \nu_{13} = \nu_{23}$ $G_{23} = G_{13} = C_{44}$ $G_{12} = C_{66}$	6
Isotrope transverse (axe d'isotropie : 3)	$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & C_{44} & 0 \\ & & & & & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix}$	$E_1 = E_2, E_3$ $\nu_{12} = \nu_{21}, \nu_{13} = \nu_{23}$ $G_{23} = G_{13} = C_{44}$ $G_{12} = C_{66} = E_1/2 (1 + \nu_{12})$	5
Quasi isotrope	$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & C_{44} & 0 \\ & & & & & C_{44} \end{bmatrix}$	$E_1 = E_2 = E_3 = E$ $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = \nu$ $G_{23} = G_{13} = G_{12} = G$	3
Isotrope	$\begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix}$	E ν $G = \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$	2

Les relations (34) et (35) sont évidemment satisfaites pour les matériaux isotropes transverses, quasi isotropes et isotropes.

Dans le cas des matériaux quasi isotropes et isotropes, la seconde relation (35) montre que $\nu < 0,5$.

Cette suite d'inégalités est très utile lors d'une campagne d'essais de caractérisation de matériaux composites, car elle guide l'expérimentateur ; la relation (31), par exemple, permet de borner un coefficient de Poisson en fonction de l'autre. Enfin, lorsque la matrice des rigidités (ou des souplesses) est entièrement déterminée, il est absolument indispensable de s'assurer qu'elle possède des valeurs propres positives.

Tableau 2 – Matrice des souplesses en fonction de la matrice des rigidités pour les corps orthotropes (1)

$$S_{11} = \frac{C_{22} C_{33} - C_{23}^2}{\Delta C} = \frac{1}{E_1} \quad S_{12} = \frac{C_{23} C_{13} - C_{33} C_{12}}{\Delta C} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}$$

$$S_{22} = \frac{C_{33} C_{11} - C_{13}^2}{\Delta C} = \frac{1}{E_2} \quad S_{13} = \frac{C_{12} C_{23} - C_{22} C_{13}}{\Delta C} = -\frac{\nu_{13}}{E_1}$$

$$S_{33} = \frac{C_{11} C_{22} - C_{12}^2}{\Delta C} = \frac{1}{E_3} \quad S_{23} = \frac{C_{13} C_{12} - C_{11} C_{23}}{\Delta C} = -\frac{\nu_{23}}{E_2}$$

$$S_{44} = \frac{1}{C_{44}} = \frac{1}{G_{23}} \quad S_{55} = \frac{1}{C_{55}} = \frac{1}{G_{13}} \quad S_{66} = \frac{1}{C_{66}} = \frac{1}{G_{12}}$$

avec $\Delta C = C_{11} C_{22} C_{33} + 2 C_{12} C_{23} C_{31} - C_{12}^2 C_{33} - C_{23}^2 C_{11} - C_{22} C_{13}^2$

(1) Pour obtenir la matrice des rigidités en fonction de la matrice des souplesses, il suffit d'invertir les symboles S et C.

Tableau 3 – Matrice des rigidités en fonction des constantes techniques pour les corps orthotropes

$$C_{11} = \frac{1 - \nu_{23} \nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta S} \quad C_{12} = \frac{\nu_{21} + \nu_{23} \nu_{31}}{E_2 E_3 \Delta S}$$

$$C_{22} = \frac{1 - \nu_{31} \nu_{13}}{E_3 E_1 \Delta S} \quad C_{13} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12} \nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta S}$$

$$C_{33} = \frac{1 - \nu_{12} \nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta S} \quad C_{23} = \frac{\nu_{32} + \nu_{31} \nu_{12}}{E_3 E_1 \Delta S}$$

$$C_{44} = \frac{1}{S_{44}} = G_{23} \quad C_{55} = \frac{1}{S_{55}} = G_{13} \quad C_{66} = \frac{1}{S_{66}} = G_{12}$$

avec $\Delta S = \frac{1 - \nu_{12} \nu_{21} - \nu_{23} \nu_{32} - \nu_{31} \nu_{13} - 2 \nu_{21} \nu_{32} \nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}$

$$\nu_{12} \nu_{23} \nu_{31} = \nu_{21} \nu_{32} \nu_{13}$$

1.6 Formules de changement de repère pour un matériau orthotrope

Effectuons une rotation d'angle α autour de l'axe 3 (ou axe \mathbf{z}). Pour un matériau orthotrope, les relations (22) se traduisent par les tableaux 4 et 5.

Remarque : on notera que les égalités figurant dans le tableau 5 (matrice des souplesses) sont identiques aux égalités du tableau 4 à condition de poser dans le tableau 5 :

$$\left\{ \begin{array}{ll} S_{ij} = C_{ij} & i, j = 1, 2, 3 \\ S_{pp} = 4C_{pp} & p = 4, 5, 6 \\ S'_{ij} = C'_{ij} & i, j = 1, 2, 3 \\ S'_{pp} = 4C'_{pp} & p = 4, 5, 6 \\ S'_{i6} = 2C'_{i6} & i = 1, 2, 3 \end{array} \right. \quad (36)$$

Cette remarque est très utile en programmation car elle permet de traiter la rotation (autour de l'axe \mathbf{z} par exemple) par un seul sous-programme. Le tableau 5 permet, grâce aux définitions (13), (14) et (15), d'évaluer l'incidence d'un changement de base sur les modules d'élasticité techniques ; nous obtenons alors le tableau 6.

Tableau 4 – Incidence d'une rotation d'angle α autour de l'axe \mathbf{z} sur la matrice des rigidités d'un matériau orthotrope

Matrice des rigidités

$$\{C'\} = \{M_\sigma\} \{C\} \{M_\sigma\}^t$$

$$C'_{11} = C_{11} \cos^4 \alpha + 2(C_{12} + 2C_{66}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + C_{22} \sin^4 \alpha$$

$$C'_{12} = (C_{11} + C_{22} - 4C_{66} - 2C_{12}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + C_{12}$$

$$C'_{13} = C_{13} \cos^2 \alpha + C_{23} \sin^2 \alpha$$

$$C'_{14} = C'_{15} = 0$$

$$C'_{16} = [C_{22} \sin^2 \alpha - C_{11} \cos^2 \alpha + (C_{12} + 2C_{66})(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)] \sin \alpha \cos \alpha$$

$$C'_{22} = C_{11} \sin^4 \alpha + 2(C_{12} + 2C_{66}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + C_{22} \cos^4 \alpha$$

$$C'_{23} = C_{13} \sin^2 \alpha + C_{23} \cos^2 \alpha$$

$$C'_{24} = C'_{25} = 0$$

$$C'_{26} = [C_{22} \cos^2 \alpha - C_{11} \sin^2 \alpha - (C_{12} + 2C_{66})(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)] \sin \alpha \cos \alpha$$

$$C'_{33} = C_{33}$$

$$C'_{34} = C'_{35} = 0$$

$$C'_{36} = \sin \alpha \cos \alpha (C_{23} - C_{13})$$

$$C'_{44} = C_{44} \cos^2 \alpha + C_{55} \sin^2 \alpha$$

$$C'_{45} = \sin \alpha \cos \alpha (C_{44} - C_{55})$$

$$C'_{46} = 0$$

$$C'_{55} = C_{44} \sin^2 \alpha + C_{55} \cos^2 \alpha$$

$$C'_{56} = 0$$

$$C'_{66} = (C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - 4C_{66}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + C_{66}$$

Tableau 5 – Incidence d’une rotation d’angle α autour de l’axe z sur la matrice des souplesses d’un matériau orthotrope
Matrice des souplesses

$$\{S'\} = \{M_\epsilon\} \{S\} \{M_\epsilon\}^t$$

$$S'_{11} = S_{11} \cos^4 \alpha + (S_{66} + 2S_{12}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + S_{22} \sin^4 \alpha$$

$$S'_{12} = (S_{11} + S_{22} - S_{66} - 2S_{12}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + S_{12}$$

$$S'_{13} = S_{13} \cos^2 \alpha + S_{23} \sin^2 \alpha$$

$$S'_{14} = S'_{15} = 0$$

$$S'_{16} = 2 \left[S_{22} \sin^2 \alpha - S_{11} \cos^2 \alpha + \left(S_{12} + \frac{S_{66}}{2} \right) (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \right] \sin \alpha \cos \alpha$$

$$S'_{22} = S_{11} \sin^4 \alpha + (S_{66} + 2S_{12}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + S_{22} \cos^4 \alpha$$

$$S'_{23} = S_{13} \sin^2 \alpha + S_{23} \cos^2 \alpha$$

$$S'_{24} = S'_{25} = 0$$

$$S'_{26} = 2 \left[S_{22} \cos^2 \alpha - S_{11} \sin^2 \alpha - \left(S_{12} + \frac{S_{66}}{2} \right) (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \right] \sin \alpha \cos \alpha$$

$$S'_{33} = S_{33}$$

$$S'_{34} = S'_{35} = 0$$

$$S'_{36} = 2 \sin \alpha \cos \alpha (S_{23} - S_{13})$$

$$S'_{44} = S_{44} \cos^2 \alpha + S_{55} \sin^2 \alpha$$

$$S'_{45} = \sin \alpha \cos \alpha (S_{44} - S_{55})$$

$$S'_{46} = 0$$

$$S'_{55} = S_{44} \sin^2 \alpha + S_{55} \cos^2 \alpha$$

$$S'_{56} = 0$$

$$S'_{66} = 4 (S_{11} + S_{22} - 2S_{12} - S_{66}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + S_{66}$$

Tableau 6 – Incidence d’une rotation d’angle α autour de l’axe z sur les modules d’élasticité techniques d’un matériau orthotrope
Modules d’élasticité techniques

$$\frac{1}{E'_1} = S'_{11} = \frac{\cos^4 \alpha}{E_1} + \frac{\sin^4 \alpha}{E_2} + \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$\frac{1}{E'_2} = S'_{22} = \frac{\sin^4 \alpha}{E_1} + \frac{\cos^4 \alpha}{E_2} + \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$E'_3 = E_3$$

$$-\nu'_{12} = E'_1 \left[\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_{12}} + \frac{2\nu_{12}}{E_1} \right) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \frac{\nu_{12}}{E_1} \right]$$

$$\nu'_{13} = \frac{E'_1}{E_3} (\nu_{31} \cos^2 \alpha + \nu_{32} \sin^2 \alpha)$$

$$\nu'_{23} = \frac{E'_2}{E_3} (\nu_{31} \sin^2 \alpha + \nu_{32} \cos^2 \alpha)$$

$$G'_{23} = \frac{1}{S'_{44}} = \left[\frac{\cos^2 \alpha}{G_{23}} + \frac{\sin^2 \alpha}{G_{13}} \right]^{-1}$$

$$G'_{13} = \frac{1}{S'_{55}} = \left[\frac{\sin^2 \alpha}{G_{23}} + \frac{\cos^2 \alpha}{G_{13}} \right]^{-1}$$

$$G'_{12} = \frac{1}{S'_{66}} = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{2\nu_{12}}{E_1} \right) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \frac{1}{G_{12}} (1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) \right]^{-1}$$

1.7 Invariants relatifs aux rigidités ou aux souplesses d’un matériau orthotrope

La notion d’invariant d’un tenseur d’ordre deux est bien connue ; il s’agit de scalaires obtenus par combinaisons des éléments de la matrice (ou du tenseur) et qui restent constants par changement de repère. Les trois invariants du tenseur des contraintes ou les coefficients de l’équation caractéristique :

$$\det([\sigma] - \lambda [I]) = 0$$

sont les suivants :

$$I_1(\sigma) = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} : \text{traction ou compression uniformes (trace de la matrice) ;}$$

$$I_2(\sigma) = \frac{1}{2} (\sigma_{ii} \sigma_{jj} - \sigma_{ij} \sigma_{ji}) = \sigma_{11} \sigma_{22} + \sigma_{11} \sigma_{33} + \sigma_{22} \sigma_{33} - \sigma_{13}^2 - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 ;$$

$$I_3(\sigma) = \det[\sigma] : \text{déterminant.}$$

Dans le cas des contraintes planes, par exemple, les deux invariants du tenseur des contraintes (ou des déformations) sont représentés graphiquement par le cercle de Mohr. On pourra trouver une information plus abondante sur la notion d’invariant dans les publications [10] [11] [12] [13].

On prendra bien garde de ne pas confondre les modules de rigidité au glissement C'_{44} et C'_{55} (tableau 4) avec les modules de rigidité au cisaillement G'_{23} et G'_{13} (tableau 6) :

$$C'_{44} \neq G'_{23} \quad C'_{55} \neq G'_{13}$$

Comme le montre la figure 5, les modules d’Young et les coefficients de Poisson de matériaux fortement anisotropes sont plus sensibles à l’orientation des axes que les modules de rigidité au cisaillement.

Dans le cas des rotations, une représentation polaire (figure 6) permet de visualiser rapidement les directions de faiblesse et de force du matériau. Cette représentation est définie de la manière suivante :

- **rayon vecteur** $\rho(\theta) = E_1(\theta)$ (ou autre module d’élasticité) ;
- **angle polaire** θ (angle de rotation),

les matériaux isotropes étant alors représentés par des cercles. Pour un tissu équilibré verre/époxy, nous avons les diagrammes de la figure 6.

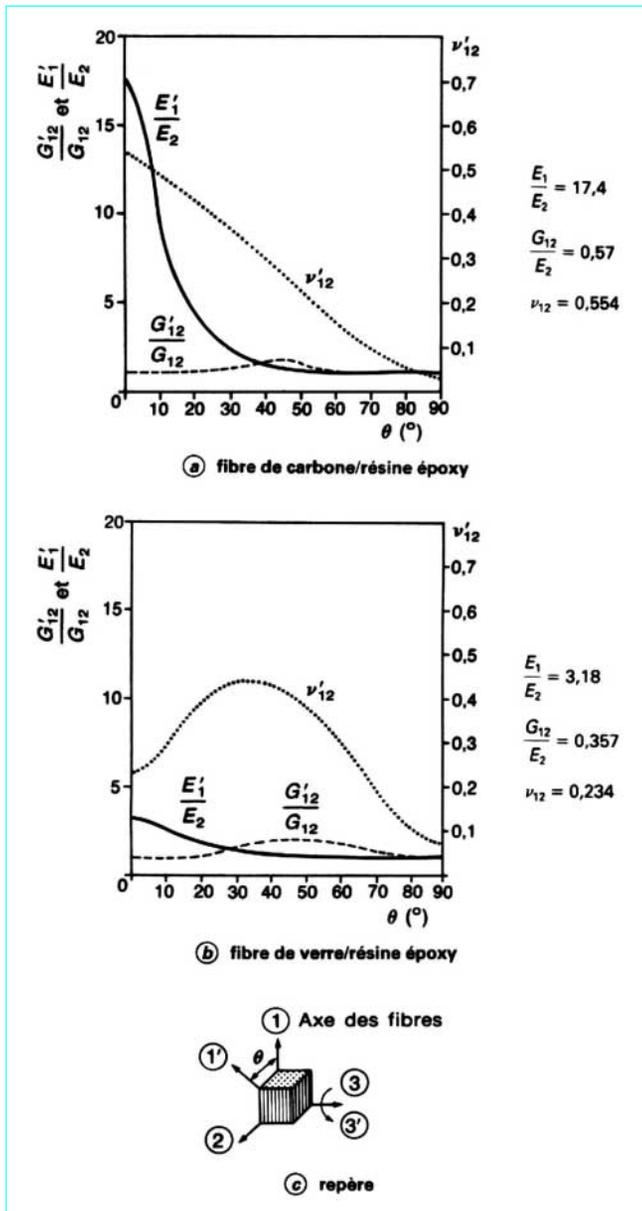


Figure 5 - Variation des modules d'élasticité techniques en fonction du repère de référence pour un composite carbone/époxy et un composite verre/époxy. Rotation autour de l'axe 3 (axe des fibres)

L'importance des invariants des tenseurs des rigidités (ou des souplesses) des matériaux orthotropes est évidente ; lors de la détermination des caractéristiques élastiques, la campagne de mesure peut être menée sur des éprouvettes dont les axes ne correspondent pas avec les axes de symétrie des matériaux. Pour la précision des mesures, il est préférable d'estimer des invariants du tenseur de rigidités (ou des souplesses) plutôt que les composantes elles-mêmes. On remonte ensuite aux rigidités et aux souplesses à partir de ces invariants.

Considérons, par exemple, un changement de repère défini par une rotation d'angle α autour de l'axe z , les relations de changement

de repère définies dans le tableau 4 (p. 12) peuvent être écrites en faisant apparaître les multiples de l'angle de rotation α [6], c'est-à-dire :

$$\left. \begin{aligned}
 C'_{11} &= U_1 + U_2 \cos 2\alpha + U_3 \cos 4\alpha \\
 C'_{12} &= U_4 - U_3 \cos 4\alpha \\
 C'_{13} &= V_1 + V_2 \cos 2\alpha \\
 C'_{16} &= -\frac{U_2}{2} \sin 2\alpha - U_3 \sin 4\alpha \\
 C'_{22} &= U_1 - U_2 \cos 2\alpha + U_3 \cos 4\alpha \\
 C'_{23} &= V_1 - V_2 \cos 2\alpha \\
 C'_{26} &= -\frac{U_2}{2} \sin 2\alpha + U_3 \sin 4\alpha \\
 C'_{36} &= -\frac{V_2}{2} \sin 2\alpha \\
 C'_{44} &= W_1 + W_2 \cos 2\alpha \\
 C'_{45} &= W_2 \sin 2\alpha \\
 C'_{55} &= W_1 - W_2 \cos 2\alpha \\
 C'_{66} &= U_5 - U_3 \cos 4\alpha
 \end{aligned} \right\} (37)$$

relations dans lesquelles :

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \frac{3C_{11} + 3C_{22} + 2C_{12} + 4C_{66}}{8} \\
 U_2 &= \frac{C_{11} - C_{22}}{2} \\
 U_3 &= \frac{C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - 4C_{66}}{8} \\
 U_4 &= \frac{C_{11} + C_{22} + 6C_{12} - 4C_{66}}{8} \\
 U_5 &= \frac{C_{11} + C_{22} - 2C_{12} + 4C_{66}}{8} \\
 V_1 &= \frac{C_{13} + C_{23}}{2} \\
 V_2 &= \frac{C_{13} - C_{23}}{2} \\
 W_1 &= \frac{C_{44} + C_{55}}{2} \\
 W_2 &= \frac{C_{44} - C_{55}}{2}
 \end{aligned}$$

Les relations (37) permettent de faire apparaître les invariants du tableau 7 par rotation autour de l'axe z [11] [12].

Les invariants présentés dans le tableau 7 sont indépendants. En les combinant, on peut également obtenir d'autres familles d'invariants, par exemple :

$$\begin{aligned}
 \frac{3C'_{11} + 3C'_{22} + 2C'_{12} + 4C'_{66}}{8} &= \frac{I_1 + 2I_2}{8} = U_1 \\
 \frac{C'_{11} + C'_{22} + 6C'_{12} - 4C'_{66}}{8} &= \frac{3I_1 - 2I_2}{8} = U_4 \\
 \frac{C'_{11} + C'_{22} - 2C'_{12} + 4C'_{66}}{8} &= \frac{2I_2 - I_1}{8} = U_5 = \frac{U_1 - U_4}{2} \\
 C'_{11} C'_{22} + 2C'_{66} (C'_{11} + C'_{22}) - C'^2_{12} - 2C'^2_{16} - 2C'^2_{26} \\
 &= U_1^2 - U_2^2 - U_4^2 - U_3^2
 \end{aligned}$$

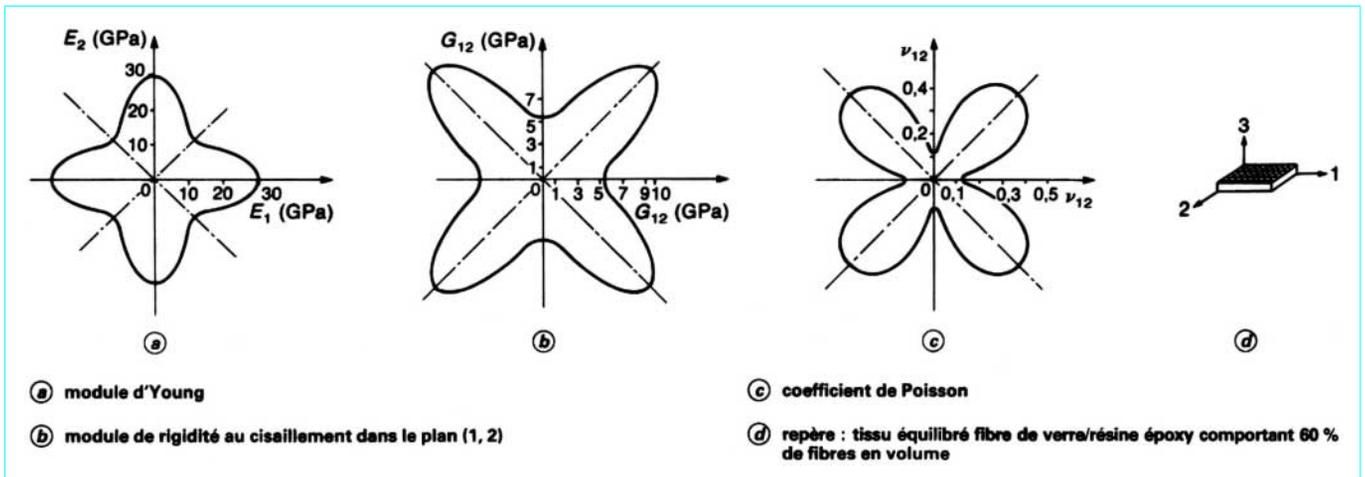


Figure 6 – Représentation polaire des modules d'élasticité techniques d'un tissu équilibré verre/époxy (d'après [9])

 Tableau 7 – Quelques invariants des rigidités et des souplesses d'un matériau orthotrope lors d'une rotation autour de l'axe z

Matrice des rigidités	Matrice des souplesses
Invariants linéaires	
$I_1(C) = C'_{11} + C'_{22} + 2C'_{12} = 2(U_1 + U_4)$	$I_1(S) = S'_{11} + S'_{22} + 2S'_{12}$
$I_2(C) = C'_{11} + C'_{22} + 2C'_{66} = 2(U_1 + U_5)$	$I_2(S) = S'_{11} + S'_{22} + \frac{S'_{66}}{2}$
$I_3(C) = C'_{66} - C'_{12}$	$I_3(S) = \frac{S'_{66} - 4S'_{12}}{4}$
$I_4(C) = C'_{13} + C'_{23} = 2V_1$	$I_4(S) = S'_{13} + S'_{23}$
$I_5(C) = C'_{44} + C'_{55} = 2W_1$	$I_5(S) = S'_{44} + S'_{55}$
Invariants quadratiques	
$II_1^2(C) = \frac{(C'_{11} - C'_{22})^2 + 4(C'_{16} + C'_{26})^2}{4} = U_2^2$	$II_1^2(S) = (S'_{11} - S'_{22})^2 + (S'_{16} - S'_{26})^2$
$II_2^2(C) = [(C'_{11} + C'_{22} - 2C'_{12} - 4C'_{66})^2 + 16(C'_{26} - C'_{16})^2]/16 = 4U_3^2$	$II_2^2(S) = [(S'_{11} + S'_{22} - 2S'_{12} - S'_{66})^2 + 4(S'_{26} - S'_{16})^2]/16$
Invariants cubiques	
$III_1(C) = \det \{C\}$	$III_1(S) = \det \{S\}$

Les invariants quadratiques II_1 et II_2 peuvent s'interpréter graphiquement respectivement comme deux cercles de rayon U_2 et $2U_3$ décrits par des points P_1 et P_2 d'angle polaire -2α et 4α [13].

1.8 Élasticité plane dans un matériau orthotrope

Bon nombre de structures composites, pour des raisons de fabrication ou d'utilisation, se présentent sous forme de plaques ou de coques, c'est-à-dire de structures dont l'une des dimensions, que nous appellerons épaisseur (et dirigée suivant l'axe 3), est très inférieure aux deux autres. La pièce composite structurale ou semi-structurale type (c'est-à-dire une pièce dimensionnée pour travailler

en résistance ou en rigidité) possède une épaisseur de l'ordre de 0,5 à 1 cm (voire 4 cm pour les composites sandwichs) pour des longueurs et des largeurs de l'ordre de 1 à 3 m ; on peut citer, par exemple, les ailerons de l'empennage vertical de l'*Airbus A 310*, les réflecteurs d'antenne de satellites, certaines suspensions d'automobile, le garnissage, les pare-chocs et le capot des moteurs d'automobile, etc.

Dans ces structures planes, l'état des contraintes est assez bien représenté par un **tenseur des contraintes planes**, c'est-à-dire :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou encore } \{\sigma\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, 0, 0, 0, \sigma_{12}\} \quad (38)$$

Un tenseur des contraintes planes (38) traduit le fait que le **vecteur contrainte** (ou effort par unité de surface) s'exerçant sur une facette quelconque de la plaque sont situés dans le plan (1, 2) de la plaque. Pour un matériau orthotrope, la loi de comportement (7) s'écrit alors dans le repère d'orthotrope :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}$$

Cette relation s'inverse pour donner :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (39)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{11} &= \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{22} &= \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{12} &= -\frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{66} &= \frac{1}{S_{66}} = C_{66} = G_{12} \end{aligned} \right\} (40)$$

En contraintes planes, les rigidités Q_{ij} sont différentes des rigidités C_{ij} figurant dans la loi de comportement tridimensionnelle. En effet, en écrivant dans la loi de comportement (6) la nullité de la contrainte σ_{33} , on montre que :

$$\epsilon_{33} = -\frac{C_{13}\epsilon_{11} + C_{23}\epsilon_{22}}{C_{33}}$$

En substituant dans σ_{11} et σ_{12} , de la relation (1), la valeur de ϵ_{33} précédente, il vient, par analogie avec la relation (39) :

$$Q_{11} = C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}, \quad Q_{22} = C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}}, \quad Q_{12} = C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}}$$

et, d'une manière générale, les **rigidités d'élasticité plane** Q_{ij} (appelées aussi **modules de plaque**) d'un matériau orthotrope sont liées aux rigidités tridimensionnelles, lorsque l'épaisseur est dirigée suivant l'axe 3, par les relations :

$$Q_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{i3}C_{j3}}{C_{33}} \quad i, j = 1, 2 \quad (41)$$

On remarquera que, en contraintes planes, une structure composite est caractérisée élastiquement par quatre modules indépendants Q_{ij} (40) qui sont inférieurs aux modules tridimensionnels :

$$Q_{ij} \leq C_{ij}$$

En déformations planes, on obtient des résultats analogues à ceux obtenus avec les relations (40) et (41) en substituant le symbole S au symbole C . Dans ce cas, on ne confondra pas les modules techniques plans ($\bar{E}_1, \bar{\nu}_{ij}$, etc.) avec les modules tridimensionnels (E_i, ν_{ij} , etc.), par exemple :

$$\bar{E}_1 = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{22}} \quad \bar{\nu}_{12} = -\frac{C_{12}}{C_{22}}$$

1.9 Modules d'élasticité de quelques composites usuels

Les données numériques relatives aux modules d'élasticité des composites à fibres sont généralement très fractionnaires et difficiles à obtenir dans les détails dans la littérature technique. Nous ajouterons à cela que les tolérances sont très larges d'un fabricant à un autre d'un laboratoire à un autre. La différence des données est due, d'une part, aux performances différentes des composites et, d'autre part, aux techniques de mesure elles-mêmes. Le lecteur doit être circonspect dans ce domaine.

Par ailleurs, signalons que les constituants de base (résine d'un côté ou matrice métallique et fibre de l'autre) ne donnent pas lieu malheureusement à des spécifications claires et complètes. Les raisons en sont multiples : les cycles de polymérisation différents pour une même résine fournissent des modules d'élasticité différents. Les fabricants ne tiennent pas souvent à donner ces renseignements. Nous mentionnerons que la caractérisation mécanique des fibres est malaisée, voire impossible, lorsque ces dernières sont anisotropes. Les renseignements notés (tableau 8) ne donnent que des ordres de grandeur et montrent la dispersion qui peut régner au sein d'une même famille de matériaux.

Nous préciserons que les composites utilisés industriellement ont un pourcentage volumique de fibres de 40 à 60 % environ.

Le tableau 8 concerne des types particuliers de composites. D'un fabricant à l'autre, ces dernières caractéristiques peuvent changer dans de grandes proportions. Par ailleurs, le mode d'élaboration influe beaucoup sur les caractéristiques mécaniques des matériaux et, en toute rigueur, on ne devrait parler que de pièce composite et non de matériau composite, car ce dernier n'existe que sous forme de structure.

Tableau 8 – Modules d'élasticité techniques de quelques composites utilisés dans l'industrie (1)

Composites		E_1 (MPa)	E_2 (MPa)	E_3 (MPa)	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	G_{23} (MPa)	G_{13} (MPa)	G_{12} (MPa)
Verre/époxy à renfort unidirectionnel 62 % de fibres 1 : axe des fibres		58 700	21 300	21 300	0,120	0,120	0,442	5 750	7 250	7 250
		48 000	15 100	15 100	0,234	0,254	0,307	5 800	5 400	5 400
Carbone/époxy à renfort unidirectionnel 57 % de fibres HM (2) 1 : axe des fibres		100 300	5 750	5 750	0,554	0,554	0,554	2 050	3 300	3 300
		94 900	7 550	7 550	0,318	0,318	0,318	2 500	3 750	3 750
Mèche de carbone (3) 1 : axe de la mèche		189 000	7 000	7 000	0,026	0,026	0,60	2 200	7 550	7 550
Carbone/époxy à structure stratifiée HR (2) 3 : axe normal au plan des plis	$\pm 45^\circ$ (4)	16 700	16 700	11 000	0,690	0,178	0,178	3 300	3 300	2 450
	0° 90° } (4)	51 800	51 800	10 600	0,051	0,420	0,420	3 300	3 300	3 750
Carbone/époxy à renfort tissé (1, 2) : plan de tissage		55 100	55 100	7 100	0,305	0,666	0,666	3 450	3 450	4 000
Kevlar/époxy (5) à renfort unidirectionnel 60 % de fibres 1 : axe des fibres	non séché	71 000	4 700	4 700	0,204	0,204	0,460	1 600	1 800	1 800
	séché	96 000	13 000	13 000	0,200	0,200	0,555	3 500	5 000	5 000
Bore/époxy 60 % de fibres 1 : axe des fibres		241 600	29 600	29 600	0,284	0,284	0,407	10 500	7 500	7 500
Bois (pin de Douglas) 1 : axe du tronc 2 : axe tangentiel 3 : axe radial		13 300	1 600	2 300	1,23	0,052	0,314	250	1 100	1 350

(1) Ces données sont obtenues par les techniques de vibrations ultrasonores et basses fréquences.

(2) HR : haute résistance ; HM : haut module.

(3) Valeurs déterminées à partir d'essais sur le composite.

(4) 0-90° séquences d'empilement.

(5) Fibre PRD49 (polyamide aromatique fabriqué par Du Pont de Nemours).

2. Comportement thermoélastique linéaire

La déformation des milieux continus, en général, et des matériaux composites, en particulier, n'est pas un pur phénomène mécanique, mais s'accompagne normalement d'effets thermiques. Ces deux effets sont liés par le concept général de thermodynamique que nous allons développer brièvement dans l'optique des milieux continus déformables. Ces notions permettront de décrire systématiquement quelques lois de comportement mécanique et de diffusion thermique (équation de la chaleur) dans les matériaux composites.

2.1 Notions de thermodynamique des milieux continus

La thermodynamique est décrite par deux principes qui ont un caractère universel :

— le premier principe ou principe de la **conservation de l'énergie** qui introduit la notion d'**énergie interne** et de chaleur reçue ;

— le second principe auquel est attachée la notion de rendement et qui introduit les notions de température thermodynamique et d'entropie.

On pourra trouver une description détaillée des principes de thermodynamique des milieux continus dans les ouvrages généraux de P. Germain [16] et de Y. C. Fung [17] par exemple.

2.1.1 Énoncé des deux principes

Rappelons que la thermodynamique est l'étude générale des transformations prenant place dans un milieu en mouvement (le terme thermostatique étant réservé à l'étude des états d'équilibre). L'énergie \mathcal{E} d'une structure Ω est alors définie comme la somme de l'énergie interne et de l'énergie cinétique représentées respectivement par une densité volumique ρu et ρv_j , ρ étant la masse volumique du matériau et $\mathbf{v} = (v_j)$ le vecteur vitesse au point \mathbf{x} à l'instant t ; u est appelée **énergie interne massique**.

Il est admis que la structure Ω ne peut recevoir de la chaleur qu'à travers sa frontière et que la quantité de chaleur reçue par unité de temps, dQ/dt , est représentée par le vecteur \mathbf{q} nommé **vecteur courant de chaleur**. Le vecteur \mathbf{q} dépend de \mathbf{x} et du temps t et le produit scalaire $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$ est la **densité surfacique de chaleur** passant au travers d'une surface de normale \mathbf{n} au point \mathbf{x} . Rappelons que l'évolution est adiabatique si $dQ/dt = 0$ ou, de manière équivalente, si $\mathbf{q} = 0$.

■ **Énoncé du 1^{er} principe** : à chaque instant, la dérivée de l'énergie \mathcal{E} d'un système Ω par rapport au temps est la somme de la puissance P_e des efforts exercés sur le système et du taux de chaleur dQ/dt reçu par le système Ω :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = P_e + \frac{dQ}{dt} \quad (42)$$

Le principe des puissances virtuelles (ou loi fondamentale de la dynamique) permet d'éliminer dans la relation (42) la puissance des efforts extérieurs et la puissance des efforts d'inertie (énergie cinétique) pour ne conserver que la puissance des efforts intérieurs de densité volumique $\sigma_{ij}d\epsilon_{ij}/dt$ [13] [14]. Le premier principe de la thermodynamique se traduit alors localement par l'égalité suivante :

$$\rho \frac{du}{dt} = \sigma_{ij} \frac{d\epsilon_{ij}}{dt} - \text{div. } \mathbf{q} \quad (43)$$

dans laquelle l'opérateur divergence est défini par :

$$\text{div. } \mathbf{q} = \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + \frac{\partial q_3}{\partial x_3}$$

Le second principe se traduit par une inégalité dans laquelle interviennent deux notions nouvelles :

- la température thermodynamique $T(\mathbf{x}, t)$ qui ne peut jamais être négative ;
- l'entropie $S(\mathbf{x}, t)$ de densité volumique $\rho s(\mathbf{x}, t)$ (on ne confondra pas l'**entropie massique** s avec le tenseur des souplesses \mathbf{s}).

L'entropie est une notion plus abstraite mais, à la différence de la température, c' est une fonction additive d'ensemble et $s(\mathbf{x}, t)$ est appelée **entropie massique de la particule**. Ces deux notions peuvent être introduites *a priori* ou justifiées à partir du premier principe concernant la conservation de l'énergie d'un processus adiabatique ($\mathbf{q} = 0$) réversible en thermostatique [4] [15] [16].

■ **Énoncé du 2^e principe** : à chaque instant et pour tout système Ω , l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\frac{dS}{dt} \geq - \iint_{\Gamma} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} d\Gamma \quad (44)$$

avec Γ frontière de la structure Ω ,

\mathbf{n} vecteur normal unitaire extérieur à Γ .

Remarque : si T est uniforme à l'instant t (indépendant de \mathbf{x}) et si le taux d'entropie est fixé, le deuxième principe stipule que le système Ω ne peut recevoir une quantité de chaleur par unité de temps supérieure à $T \frac{dS}{dt}$.

En appliquant le théorème de la divergence au second membre de l'inégalité (44), le deuxième principe de la thermodynamique se traduit par la loi locale suivante :

$$\rho \frac{ds}{dt} + \text{div. } \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) \geq 0 \quad (45)$$

Il est commode (§ 2.3) de faire intervenir le premier principe de la thermodynamique dans la relation (45) et d'introduire l'**énergie libre massique** f définie par :

$$f = u - Ts \quad (46)$$

On utilise la relation :

$$\text{div. } \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) = \frac{1}{T} \text{div. } \mathbf{q} - \frac{\mathbf{q} \cdot \text{grad } T}{T^2}$$

avec **grad** T vecteur ayant pour composantes $\frac{\partial T}{\partial x_1}, \frac{\partial T}{\partial x_2}$ et $\frac{\partial T}{\partial x_3}$, tel que :

$$\text{grad } T = \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right)$$

L'inégalité (45) se traduit alors par :

$$\rho \frac{df}{dt} \leq \sigma_{ij} \frac{d\epsilon_{ij}}{dt} - s \frac{dT}{dt} - \frac{\mathbf{q} \cdot \text{grad } T}{T} \quad (47)$$

qui est connue sous le nom d'**inégalité de Clausius-Duhem**.

2.1.2 Variables d'état internes

Aux inconnues classiques de la mécanique, champ des déplacements \mathbf{U} , tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$, la thermodynamique ajoute l'énergie interne massique u , le vecteur courant de chaleur \mathbf{q} , l'entropie massique s et la température thermodynamique T .

Il est évident que, pour déterminer toutes les inconnues, il faut connaître les lois de comportement thermomécanique reliant certaines d'entre elles et décrivant le comportement thermomécanique du milieu. On dira alors qu'un système de lois de comportement constitue un processus thermodynamiquement admissible si, dans tout mouvement du système (ou quel que soit le champ des déplacements \mathbf{U}), l'inégalité (47) est satisfaite. L'objet de la thermodynamique des milieux continus est alors la recherche de lois de comportement ou d'**énergie libre massique** f conduisant à des processus thermodynamiquement admissibles. Pour chaque type de milieu, il faut donc d'abord choisir quelles seront les variables permettant de décrire les lois de comportement. Une méthode possible consiste à admettre que, si l'état d'équilibre (thermostatique) est décrit par un certain nombre de variables $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_n$, l'état thermodynamique est décrit par les mêmes variables et les mêmes expressions [14]. Une des manières de décrire complètement le comportement thermostatique d'un système est de faire appel à la notion de potentiel, on dit alors que u, s, T , etc., sont des **fonctions d'état** et que les variables $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_n$ forment un ensemble de **variables d'état internes**.

Cette hypothèse est évidemment mise en défaut si l'évolution globale du système en mouvement est trop rapide, mais, dans les cas courants, elle est en accord avec l'expérience puisque la caractérisation des propriétés thermodynamiques d'un milieu se fait généralement à l'équilibre. Les fonctions s, T , etc., peuvent également être prises comme variables d'état :

$$\chi_0 = T, \chi_1 = \epsilon_{12}, \chi_2 = \epsilon_{22}, \chi_3 = \epsilon_{33}, \chi_4 = \epsilon_{23}, \chi_5 = \epsilon_{13}, \chi_6 = \epsilon_{12}$$

forment, par exemple, un ensemble de variables d'état pour u et f .

Si seulement T varie de dT , en thermostatique la structure reçoit, par unité de volume, la quantité de chaleur :

$$dQ = \rho c_\epsilon dt$$

avec c_ϵ **capacité thermique massique à déformation constante**.

Le travail des efforts extérieurs étant nul, d'après le premier principe de la thermodynamique :

$$dQ = \rho du \quad (48)$$

D'après le théorème de Carnot, issu du deuxième principe [14] :

$$dQ = \rho T ds \quad (49)$$

La relation (48) permet d'exprimer la capacité thermique massique à déformation constante c_ϵ en fonction de l'énergie interne massique par l'égalité :

$$c_\epsilon = \frac{\partial u}{\partial T} (T, \epsilon) \quad (50)$$

tandis que les relations (46), (48) et (49) montrent que :

$$df = -s dT$$

si bien que l'entropie massique a pour valeur :

$$s = -\frac{\partial f}{\partial T}(T, \epsilon) \tag{51}$$

La définition de l'énergie libre massique (46) permet également de relier cette dernière à la capacité thermique massique à déformation constante :

$$c_\epsilon = -T \frac{\partial^2 f}{\partial T^2}(T, \epsilon) \tag{52}$$

en effet, nous avons :

$$\frac{\partial u}{\partial T} = \frac{\partial f}{\partial T} + s + T \frac{\partial s}{\partial T} = -T \frac{\partial^2 f}{\partial T^2}$$

Remarque : T et $\sigma = (\sigma_{ij})$ ne forment pas un ensemble de variables d'état internes ; en effet, en ne faisant varier que T , les contraintes σ_{ij} étant fixées, rien ne s'oppose à ce que les déformations ϵ_{ij} puissent varier et c'est ce que montre l'expérience. Le travail des forces extérieures n'est pas nul et, d'après le principe de conservation de l'énergie, la variation de u n'est pas uniquement due à la variation de la température.

2.1.3 Dissipation et loi de Fourier

Dans la pratique, on exprime généralement l'énergie libre massique f et l'énergie interne massique u en fonction de la température thermodynamique T ($T = \chi_0$) et d'autres variables d'état internes $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ (les six déformations indépendantes par exemple). Il apparaît donc, d'après la relation (51) :

$$\frac{df}{dT} = -s \frac{dT}{dT} + P_r \tag{53}$$

avec

$$P_r = \sum_{p=1}^n \frac{\partial f}{\partial \chi_p} \frac{\partial \chi_p}{\partial T}$$

Cette décomposition est due au rôle particulier joué par la température en thermodynamique et P_r est appelée **puissance massique réversible reçue**. En effet, si nous écrivons l'inégalité de Clausius-Duhem, d'après la relation (47) et en tenant compte de ces notations, nous obtenons :

$$\sigma_{ij} \frac{d\epsilon_{ij}}{dt} - \rho P_r - \frac{\mathbf{q} \cdot \text{grad } T}{T} \geq 0 \tag{54}$$

En posant :

$$\phi_1 = \sigma_{ij} \frac{d\epsilon_{ij}}{dt} - \rho P_r \quad \text{dissipation intrinsèque volumique}$$

$$\phi_2 = -\frac{\mathbf{q} \cdot \text{grad } T}{T} \quad \text{dissipation thermique volumique}$$

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 \quad \text{dissipation volumique}$$

il vient :

$$\phi \geq 0 \tag{55}$$

En particulier, si la température est uniforme dans l'espace $\phi_2 = 0$, donc $\phi_1 \geq 0$, ϕ_1 est la puissance dissipée ou écart entre la puissance des efforts intérieurs $\sigma_{ij} \frac{d\epsilon_{ij}}{dt}$ et la puissance récupérable P_r . Cet

écart est positif, c'est-à-dire que la puissance récupérable est inférieure à la puissance des efforts intérieurs, l'égalité ayant lieu pour les milieux élastiques ($\phi_1 = 0$). Cette interprétation justifie la terminologie puissance massique réversible reçue. L'identité (53) s'écrit aussi en fonction de la puissance intrinsèque volumique ϕ_1 :

$$\rho \frac{df}{dt} = -\rho s \frac{dT}{dt} + \sigma_{ij} \frac{d\epsilon_{ij}}{dt} - \phi_1 \tag{56}$$

En éliminant dans l'égalité (56) $\sigma_{ij} d\epsilon_{ij} / dt$ à l'aide du premier principe de la thermodynamique, il vient :

$$-\rho \left(\frac{df}{dt} - s \frac{dT}{dt} - \frac{du}{dt} \right) = -\text{div. } \mathbf{q} + \phi_1$$

ou encore, compte tenu de (46) :

$$\rho T \frac{ds}{dt} = -\text{div. } \mathbf{q} + \phi_1 \tag{57}$$

Le comportement rhéologique du milieu, en particulier celui du matériau composite, sera déterminé par la donnée de l'**énergie libre massique** f et de la **dissipation intrinsèque du milieu** ϕ . L'identité (56) permettra de mettre en évidence les lois de comportement thermomécanique du matériau ainsi que la dissipation intrinsèque volumique ϕ_1 qui doit être positive tandis que l'égalité (57), qui est une variante du principe de la conservation de l'énergie, conduira à l'équation de la chaleur.

Dans la pratique, les dissipations intrinsèque ϕ_1 et thermique ϕ_2 sont découplées et le potentiel f est fréquemment déterminé par la connaissance de ϕ_1 ; cette démarche présente l'avantage de mettre en évidence et d'interpréter le mécanisme dissipatif qui est spécifique du matériau.

Un mécanisme dissipatif fréquemment utilisé est celui qui suppose que la dissipation ϕ est une expression quadratique des variables Y_j , $j = 1, 2, \dots, m$ qui dépendent des variables d'état internes T, χ_1, \dots, χ_n , éventuellement par l'intermédiaire des fonctions inconnues du problème :

$$\phi = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m L_{ij} Y_i Y_j \geq 0$$

La matrice carrée $[L] = (L_{ij})$, de dimension m , est supposée symétrique et inversible :

$$L_{ij} = L_{ji}$$

Ce résultat, qui est le premier historiquement à avoir été dégagé, est connu sous le nom de **loi complémentaire de la thermodynamique**. La propriété de symétrie de $[L]$ porte le nom de **principe d'Onsager** [16] [17]. Dans le cas de la dissipation thermique volumique ϕ_2 par exemple :

$$Y_1 = q_1 \quad Y_2 = q_2 \quad Y_3 = q_3$$

et donc :

$$\phi_2 = -\sum_{i=1}^3 q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 M_{ij} q_i q_j$$

par identification il vient :

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = -\sum_{j=1}^3 M_{ij} q_j, \quad i = 1, 2, 3$$

Ou encore, en inversant cette relation, nous obtenons la **loi de Fourier** :

$$\mathbf{q} = -[\lambda] \text{ grad } T \quad \text{ou} \quad q_i = -\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad \text{avec} \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{58}$$

Le tenseur λ d'ordre 2 associé à la matrice $[\lambda]$ de rang 3 inverse de $[M]$ est appelé **tenseur de conductivité thermique du matériau**, il est symétrique d'après le principe d'Onsager et, habituellement, on se contente de supposer qu'il ne dépend que de la température thermodynamique T . Ces lois de Fourier, qui donnent une description satisfaisante des phénomènes de conduction thermique pour une gamme très large de milieux, sont également usitées dans le domaine des composites.

Le composite étant anisotrope lorsque l'on passe d'une base orthonormée (x, y, z) à une base orthonormée (x', y', z') , la relation de changement de base pour le tenseur λ de conductivité thermique est analogue à la relation (19) si l'on utilise la notation vectorielle (5) :

$$\{\lambda'\} = \{M_\sigma\} \{\lambda\} \tag{59}$$

la matrice de rang 6 $\{M_\sigma\}$ étant définie par la relation (20) et :

$$\{\lambda\} = \{\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}, \lambda_{23}, \lambda_{13}, \lambda_{12}\}$$

Si l'on tient compte des divers degrés de symétries matérielles des matériaux composites (§ 1.3), le tenseur λ (ou le vecteur $\{\lambda\}$) prend les formes simples indiquées dans le tableau 9 (le processus de simplification est identique à celui développé dans le paragraphe 1.3). Dans le cas d'un milieu isotrope, ce tableau montre que la loi de Fourier traduit le fait que la dissipation thermique est proportionnelle au carré du module du vecteur courant de chaleur q . On peut noter que les données numériques relatives aux caractéristiques thermiques des matériaux sont peu abondantes. Trois causes peuvent expliquer cette rareté :

- la relative jeunesse des matériaux composites industriels (25 ans environ) et le peu d'intérêt porté jusqu'à présent à l'aspect thermique ; le tableau 10 montre pourtant la nette supériorité de certains composites par rapport aux métaux dans les problèmes d'isolation thermique (rapport des conductivités thermiques) ;
- la confidentialité qui règne dans l'étude de ces matériaux nouveaux ;
- la difficulté de mesure essentiellement due à l'anisotropie du matériau.

Tableau 9 – Diverses formes du tenseur de conductivité thermique suivant les degrés de symétrie du matériau composite

Symétrie du matériau	Nombres de modules d'élasticité indépendants	Conductivité thermique (1)
orthotrope	9	$\{\lambda\} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, 0, 0, 0)$
quasi isotrope transverse dans le plan (1, 2)	6	$\{\lambda\} = (\lambda_1, \lambda_1, \lambda_3, 0, 0, 0)$
isotrope transverse, isotropie dans le plan (1, 2)	5	$\{\lambda\} = (\lambda_1, \lambda_1, \lambda_3, 0, 0, 0)$
quasi isotrope	3	$\{\lambda\} = (\lambda, \lambda, \lambda, 0, 0, 0)$
isotrope	2	$\{\lambda\} = (\lambda, \lambda, \lambda, 0, 0, 0)$

(1) $\{\lambda\} = \{\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}, \lambda_{23}, \lambda_{13}, \lambda_{12}\}$ dans le repère d'orthotropie.

2.2 Loi de Duhamel-Neumann

On peut donner la définition générale d'un composite thermoélastique au moyen des quatre conditions suivantes :

- le tenseur des petites déformations ϵ constituée avec la température T un système complet de variables internes ;
- les propriétés thermodynamiques sont décrites par la donnée de l'énergie libre de la relation (46), $f(T, \epsilon)$;
- la dissipation intrinsèque volumique ϕ_1 est toujours identiquement nulle (le milieu élastique n'est pas dissipatif) ;

— dans la configuration de référence, les contraintes sont nulles, la température est uniforme et vaut T_0 ; on dit alors que la configuration de référence est un état naturel du milieu.

Tableau 10 – Caractéristiques thermiques (à température ambiante 15° C) de quelques matériaux composites (1)

Matériau	Tenseur de conductivité thermique [W/(m · K)]			Capacité thermique massique [J/(kg · K)]
	λ_1	λ_2	λ_3	
Fibre de carbone 1 : axe des fibres	10	750
Verre/époxy à structure stratifiée 0-90° (2)	0,5	0,5
Acier	62	62	62	490
Aluminium	210	210	210	920

(1) L'acier et l'aluminium sont mentionnés à titre de comparaison : $1 \text{ J/(kg · K)} \approx 0,239 \times 10^{-3} \text{ cal/(g · K)}$

(2) 0-90° séquences d'empilement.

Notons que la dernière assertion n'est pas obligatoire. Le comportement du composite étant supposé linéaire, on choisit l'énergie libre massique f sous forme d'une expression quadratique des variables thermodynamiques T et ϵ_{ij} avec $i, j = 1, 2, 3$. La masse volumique du matériau étant ρ , nous posons donc :

$$\rho f(T, \epsilon) = \frac{1}{2} c_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} - (T - T_0) a_{ij} \epsilon_{ij} + \frac{1}{2} (T - T_0)^2 \gamma \tag{60}$$

Remarquons que l'expression (60) est obtenue en négligeant les infiniment petits du 3^e ordre dans le développement de Taylor de $f(T, \epsilon)$ au voisinage de $(T_0, 0)$. Nous avons donc :

$$\left\{ \begin{aligned} c_{ijkl}(T_0) &= \rho \frac{\partial^2 f(T_0, 0)}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} \text{ avec } c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{klij} = c_{ijlk} \\ a_{ij}(T_0) &= -\rho \frac{\partial^2 f(T_0, 0)}{\partial T \partial \epsilon_{ij}} \text{ avec } a_{ij} = a_{ji} \\ \gamma(T_0) &= \rho \frac{\partial^2 f(T_0)}{\partial T^2} = -\frac{\rho c_\epsilon(T_0)}{T_0} \end{aligned} \right. \tag{61}$$

Les propriétés de symétrie de la relation (61) résultent de la symétrie du tenseur des petites déformations et c_ϵ est la capacité thermique massique à déformation constante. Dans le cas de l'élasticité, l'identité (56), qui se traduit par :

$$\rho \left(\frac{\partial f}{\partial T} \frac{dT}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}} \frac{d\epsilon_{ij}}{dt} \right) = -\rho s \frac{dT}{dt} + \sigma_{ij} \frac{d\epsilon_{ij}}{dt} \tag{62}$$

quels que soient $\epsilon = (\epsilon_{ij})$ et T , fournit par identification la densité massique d'entropie :

$$s = -\frac{\partial f}{\partial T} = \frac{1}{\rho} (a_{ij} \epsilon_{ij} - \gamma \Delta T) \tag{63}$$

ainsi que la loi de comportement mécanique :

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}} = c_{ijkl}(T_0) \epsilon_{kl} - a_{ij}(T_0) \Delta T \tag{64}$$

Dans ces égalités, nous avons posé $\Delta T = T - T_0$.

Le tenseur des rigidités du matériau $\mathbf{c}(T_0) = (c_{ijkl}(T_0))$ est plus exactement le **tenseur des rigidités du matériau en évolution isotherme** ($T = T_0 = Ct\theta$). Le tenseur du second ordre symétrique $\mathbf{a} = (a_{ij})$ est appelé **tenseur de compressibilité thermique** (il s'exprime en mégapascals par kelvin ou MPa/K). La relation (64) est connue sous le nom de loi de Duhamel-Neumann, elle généralise la loi de Hooke lorsque l'on prend en considération les contraintes d'origine thermique.

En inversant la relation (64) à l'aide du tenseur des souplesses $\mathbf{s} = s_{ijkl}(T_0)$ comme dans la relation (8), il vient :

$$\epsilon_{ij} = s_{ijkl}(T_0) \sigma_{kl} + \alpha_{ij}(T_0) \Delta T \tag{65}$$

Le **tenseur de dilatation thermique** est appelé $\alpha = (\alpha_{ij})$ (il s'exprime en K^{-1}), il est symétrique et est lié au tenseur de compressibilité thermique par les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{ij}(T_0) &= s_{ijkl}(T_0) a_{kl}(T_0) \\ a_{ij}(T_0) &= c_{ijkl}(T_0) \alpha_{kl}(T_0) \end{aligned} \right\} \tag{66}$$

En accord avec la convention présentée par les relations (5), posons :

$$\begin{aligned} \{a\} &= (a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{23}, a_{13}, a_{12}) \\ \{\alpha\} &= (\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, 2\alpha_{23}, 2\alpha_{13}, 2\alpha_{12}) \end{aligned}$$

Les relations (66) s'écrivent alors matriciellement :

$$\left. \begin{aligned} \{\alpha\} &= \{S\} \{a\} \\ \{a\} &= \{C\} \{\alpha\} \end{aligned} \right\} \tag{67}$$

Les tenseurs de compressibilité et de dilatation thermique suivent la loi de changement de base des tenseurs d'ordre 2 et, lorsque l'on passe d'une base orthonormée (x, y, z) à une base orthonormée (x', y', z') , la relation de changement de base est analogue à celle établie pour le tenseur de conductivité thermique λ (59), c'est-à-dire :

$$\left. \begin{aligned} \{a'\} &= \{M_\sigma\} \{a\} \\ \{\alpha'\} &= \{M_\epsilon\} \{\alpha\} \end{aligned} \right\}$$

les matrices $\{M_\sigma\}$ et $\{M_\epsilon\}$ étant définies par les égalités (20).

Les mesures de dilatométrie [18] se font sous contraintes nulles et permettent donc de déterminer $\{\alpha\}$ d'après la relation (65). Les caractéristiques thermoélastiques du matériau sont donc généralement connues par la donnée du tenseur α .

Les tenseurs \mathbf{a} et α se simplifient en fonction des divers degrés de symétrie naturelle du matériau composite. Le tableau 9, dans lequel le symbole $\{\lambda\}$ peut être remplacé par $\{a\}$ ou $\{\alpha\}$, fournit les diverses formes possibles des tenseurs thermiques d'un matériau composite. Le tenseur de dilatation thermique d'un matériau orthotrope est diagonal, ce qui montre que les variations de température dans un tel matériau n'introduisent ni déformations de glissement ni contraintes de cisaillement, mais uniquement des dilatations et des compressions. Cette propriété des matériaux orthotropes justifie la terminologie tenseur de dilatation thermique ou tenseur de compressibilité thermique, mais pour des matériaux de degré de symétrie moindre les termes *tenseur de déformations thermiques* et *tenseur de contraintes thermiques* sont plus exacts.

La variation relative de volume au cours d'une déformation est représentée par :

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$$

et dans le cas de déformations thermiques par :

$$\frac{\Delta V}{V} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \Delta T$$

avec $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ **coefficient de dilatation cubique du matériau**,

α_1, α_2 et α_3 **coefficients de dilatation linéique**.

Ces derniers peuvent être négatifs, ce qui exprime qu'une élévation de température produit une contraction, c'est le cas, par exemple, de matériaux fabriqués à très haute température (2 000 °C) comme les fibres de carbone (tableau 11).

Tableau 11 – Coefficients de dilatation linéique de quelques matériaux à la température ambiante (1)

Matériau	α_1 (en $10^{-6} K^{-1}$)	α_2 (en $10^{-6} K^{-1}$)	α_3 (en $10^{-6} K^{-1}$)
Fibre de verre E	1,5 à 5		
Fibre de carbone T 300 (axe des fibres : 1)	- 1	19	19
Résine époxy Narmco 5 208	50	50	50
Verre/époxy tissu à renfort tissé équilibré 60 % de fibres (1, 2) : plan de tissage	12	12
Carbone/époxy, à structure stratifiée 0-90° (2) 65 % de fibres (1, 2) : plan de tissage	27	27
Acier de construction	13	13	13
Aluminium	23	23	23
Fibre Nicalon (SiC)	3,1

(1) Il s'agit de valeurs moyennes pouvant varier avec le drapage et le cycle de cuisson et avec la température.

(2) 0-90° séquences d'empilement.

Les modules d'élasticité des matériaux, comme les coefficients de dilatation linéique des matériaux composites, sont très sensibles à la température T_0 et leurs évolutions, comme le montrent les figures 7 et 8, peuvent être très variées ; la décroissance des modules d'Young avec la température, qui est quasi systématique pour les matériaux classiques, peut être remise en cause par certains composites (figure 7) qui sont fabriqués à très haute température (2 000 à 2 500 °C).

Si nous remplaçons dans la relation (57) l'entropie massique s d'un composite élastique donnée par la relation (63), le flux de chaleur à la température T_0 est géré par la loi :

$$T_0 \left(a_{ij} \frac{d\epsilon_{ij}}{dt} - \gamma \frac{\partial T}{\partial t} \right) = - \text{div. } \mathbf{q}$$

Le vecteur courant de chaleur \mathbf{q} étant lié à la température par la loi de Fourier (58), la répartition de température dans un composite élastique est régie par l'équation aux dérivées partielles qui est connue sous le nom d'**équation de la chaleur** ou d'**équation de conduction** :

$$\lambda_{ij}(T_0) \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = \rho c_e(T_0) \frac{\partial T}{\partial t} + T_0 a_{ij}(T_0) \frac{d\epsilon_{ij}}{dt} \tag{68}$$

Rappelons que c_e est la capacité thermique massique à déformation constante d'après les relations (52) et (61) et que $\lambda = (\lambda_{ij})$ est le tenseur de conductivité thermique (tableau 10). Soulignons

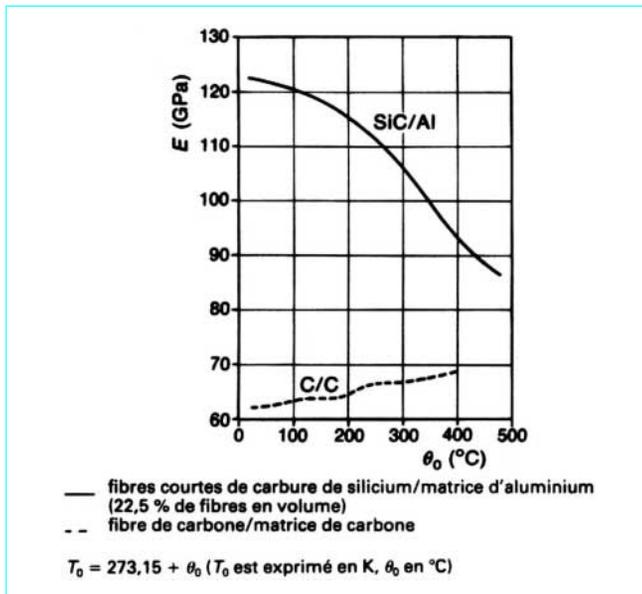


Figure 7 – Variation du module d'Young de deux composites réfractaires en fonction de la température θ_0

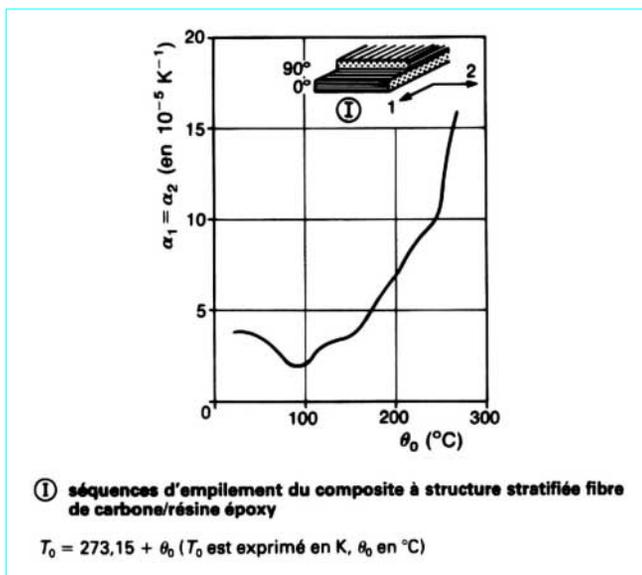


Figure 8 – Variation en fonction de la température θ_0 des coefficients de dilatation linéique du composite carbone/époxy à structure stratifiée

également que, si les grandeurs tensorielles sont exprimées dans le repère d'orthotropie du matériau, les tenseurs de conductivité thermique λ et de compressibilité thermique \mathbf{a} sont diagonaux, si bien que la relation (68) se présente sous une forme plus simple [15].

La théorie qui précède, bien que linéaire et concernant un composite anisotrope, n'est pas simple : la présence des dilatations dans la relation (68) fait que l'on ne peut résoudre l'équation de la chaleur sans tenir compte de la vitesse de dilatation du matériau.

Il ne faut pas oublier qu'il s'agit d'une théorie dynamique à laquelle il faut adjoindre la loi fondamentale de la dynamique :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} \tag{69}$$

dans laquelle $\mathbf{f} = (f_i)$ est la densité volumique d'efforts à distance ($\mathbf{f} = \rho \mathbf{g}$ pour l'action de la pesanteur, $\mathbf{f} = \rho \omega^2 \mathbf{r}$ pour l'action de la force centrifuge d'une pièce en rotation uniforme de vitesse angulaire ω par exemple).

Le lecteur pourra faire un parallèle entre la structure et le rôle des lois de comportement mécanique (64) et du mouvement (69), d'une part, et des lois de comportement thermique (58) (loi de Fourier) et de diffusion thermique (68), d'autre part. Nous avons enfin supposé que les grandeurs caractéristiques du matériau, rigidités, souplesses, coefficients de dilatation, capacité thermique massique, etc., ne dépendent que de la température et sont prises comme variables thermodynamiques. Cette hypothèse est raisonnable et est généralement admise en petites déformations. On notera que les phénomènes mécaniques et thermiques sont couplés, c'est-à-dire que l'on ne peut utiliser la loi de comportement mécanique sans tenir compte de la température ni mettre en évidence la transmission de chaleur sans faire appel aux déformations. Si ce couplage peut cependant être supprimé dans le cas extrême des processus isothermes ($T = T_0$) ou le cas extrême des processus adiabatiques ($\mathbf{q} = 0$), il doit être examiné avec soin dans des matériaux fortement anisotropes comme les composites.

2.3 Thermoélasticité découplée

2.3.1 Processus isotherme

Dans un tel processus, $T = T_0$, la température reste constante au cours du mouvement et, d'après les relations (62) et (64), $\Delta T = 0$:

$$\frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} = f(T_0, \epsilon)$$

On dit alors que la fonction w est la densité volumique d'énergie de déformation d'après la relation (12) :

$$w(\epsilon) = f(T_0, \epsilon) = \frac{1}{2} c_{ijkl}(T_0) \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \tag{70}$$

Dans un processus isotherme, $f(T_0, \epsilon)$ est une fonction convexe du tenseur des déformations $\epsilon = (\epsilon_{ij})$ [16], et donc la forme quadratique positive est définie par :

$$\frac{\partial^2 f(T_0, \epsilon)}{\partial \epsilon_{pq} \partial \epsilon_{rs}} = c_{pqrs}(T_0)$$

Cela confirme les affirmations mentionnées au paragraphe 1.1 et stipulant que les matrices des rigidités $\{C\}$ et des souplesses $\{S\}$ sont positives. D'après la relation (12), en processus isotherme, la loi de comportement mécanique, qui s'écrit :

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}(T_0) \epsilon_{kl}$$

n'est autre que celle rencontrée classiquement au paragraphe 1.1 dans les relations (6) et (7). En ce qui concerne l'équation de conduction (68), ce cas peut être considéré comme un cas limite pour lequel le tenseur de conductivité thermique λ serait infini (milieu infiniment conducteur).

2.3.2 Processus adiabatique

C'est le cas limite où le tenseur de conductivité thermique λ est nul (milieu non conducteur), ce qui implique la nullité du vecteur courant de chaleur $\mathbf{q} = 0$ d'après la relation de Fourier (58).

L'égalité (63) montre que l'entropie massique s est constante au cours du mouvement. Nous prendrons $s = 0$ sans restreindre la généralité puisque s est un potentiel défini à une constante près.

D'après la relation (63) :

$$\Delta T = (T - T_0) = \frac{a_{ij} \epsilon_{ij}}{\gamma}$$

si bien que la loi de comportement mécanique s'écrit :

$$\sigma_{ij} = \left[c_{ijkl}(T_0) - \frac{a_{kl} a_{ij}}{\gamma} \right] \epsilon_{kl}$$

L'expression (61) donnant γ permet d'exprimer la loi de comportement mécanique sous la forme :

$$\sigma_{ij} = \left[c_{ijkl}(T_0) + \frac{T_0 a_{ij}(T_0) a_{kl}(T_0)}{\rho c_\epsilon(T_0)} \right] \epsilon_{kl} \quad (71)$$

La loi de comportement mécanique est analogue à celle que l'on doit considérer avec des évolutions isothermes, les modules de rigidité étant (en règle générale) supérieurs. Remarquons que, dans le cas d'un matériau orthotrope ($a_{ij} = 0$ si $i \neq j$), seules les rigidités de dilatation augmentent, les modules de rigidité au glissement restent inchangés. On peut également noter que [15] [16] :

$$\frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} = \rho u(s_0, \epsilon)$$

ce qui permet d'introduire une densité volumique w_a d'énergie de déformation des processus adiabatiques définie par :

$$w_a(\epsilon) = \rho u(s_0, \epsilon) = \frac{1}{2} c_{ijkl}(T_0) \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} + T_0 \frac{[a_{ij}(T_0) \epsilon_{ij}]^2}{2 \rho c_\epsilon(T_0)}$$

Nous constatons donc que l'énergie libre massique f régit les processus isothermes tandis que l'énergie interne massique u régit les processus adiabatiques.

Enfin, dans un processus adiabatique ($\mathbf{q} = 0$), la loi de Fourier (58) montre que l'équation de diffusion de la chaleur dans un milieu composite se ramène à :

$$\rho c_\epsilon(T_0) \frac{\partial T}{\partial t} + T_0 a_{ij}(T_0) \frac{d\epsilon_{ij}}{dt} = 0$$

2.3.3 Processus découplé

L'équation de la chaleur (68) peut se mettre sous la forme :

$$\lambda_{ij} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = \rho c_\epsilon \frac{\partial T}{\partial t} \left(1 + T_0 \eta_{ij} \frac{d\epsilon_{ij}}{dt} \frac{\partial T}{\partial t} \right) \quad (72)$$

à condition de poser :

$$\eta_{ij} = \frac{a_{ij}}{\rho c_\epsilon} = \frac{c_{ijkl}}{\rho} \frac{\alpha_{kl}}{c_\epsilon}$$

Pour un composite à fibre de carbone, par **exemple**, les coefficients η_{ij} non nuls ont pour valeur :

$$\eta_{11} \approx 0,1 \quad \eta_{22} = \eta_{33} \approx 0,35$$

Si l'axe 1 est l'axe de la fibre :

$$a_{11} = 0,132 \text{ MPa/K}; a_{22} = a_{33} = 0,48 \text{ MPa/K}; c_\epsilon = 1,35 \text{ J/(m}^3 \cdot \text{K)}$$

La suppression du terme de couplage :

$$T_0 \eta_{ij} (d\epsilon_{ij}/dt) / (\partial T/\partial t)$$

est alors licite pourvu que la vitesse de déformation $d\epsilon_{ij}/dt$ soit de l'ordre de grandeur de la vitesse de variation relative de température $(\partial T/\partial t)/T_0$.

Cela exclut les évolutions brutales de la structure dans le temps et le problème de thermoélasticité est alors gouverné par le système différentiel suivant auquel il faut adjoindre des conditions aux limites sur la frontière de la structure ainsi qu'un ensemble de conditions initiales :

— **relation de comportement mécanique (64) :**

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}(T_0) \epsilon_{kl} - a_{ij}(T_0) \Delta T \quad (73)$$

avec

$$\Delta T = T - T_0$$

— **équation du mouvement (69) :**

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} \quad (74)$$

avec f_i force à distance par unité de volume ;

— **équation de la chaleur (68) :**

$$\lambda_{ij}(T_0) \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = \rho c_\epsilon(T_0) \frac{\partial T}{\partial t} \quad (75)$$

Le processus précédent est découplé, en effet, il faut d'abord résoudre l'équation de la chaleur (75) pour trouver la distribution de température dans la structure et traiter ensuite le problème de mécanique (73) et (74).

Le coefficient η_{ij} est le produit de la rigidité massique c_{ijkl}/ρ par le rapport du coefficient de dilatation linéique à la capacité thermique massique α_{ij}/c_ϵ . Si ce dernier rapport peut être, dans les matériaux composites, du même ordre de grandeur que dans les matériaux classiques, il n'en est pas de même de la rigidité massique qui peut être dans les composites trois à cinq fois supérieure. Il faut donc être prudent quant au découplage des phénomènes thermiques et des phénomènes mécaniques et s'assurer de la validité des égalités (73), (74) et (75).

3. Comportement viscoélastique linéaire

Si le schéma de l'élasticité linéaire représente assez bien le comportement mécanique des fibres en petites déformations, il n'en est pas de même de la matrice qui assure la liaison entre les renforts. Si cette dernière est organique et généralement constituée de grosses molécules, elle présente un caractère visqueux. On entend par visqueux un milieu dans lequel la **dissipation volumique intrinsèque** ϕ_1 (55) n'est fonction que des vitesses des divers paramètres caractérisant le milieu (vitesses de déformation par exemple). La matrice étant visqueuse, elle va donc conférer au matériau composite un caractère de viscosité. La viscosité du composite peut également avoir pour origine l'hétérogénéité du matériau. En effet,

si la liaison fibre-matrice est médiocre, des microfrottements entre les différents constituants provoquent une perte d'énergie que l'on peut traduire globalement par de la viscosité.

Un **mélange de graphite et de cuivre**, composé de phases essentiellement élastiques, présente, par exemple, un caractère visqueux assez prononcé (figure 11).

Cette dissipation d'énergie, qui dépend des vitesses, peut avoir un effet positif et recherché dans les comportements vibratoire et acoustique des structures.

3.1 Fonctions de relaxation et de retard à la déformation

Afin de pouvoir décrire le milieu viscoélastique le plus général et de ne pas se limiter aux milieux simples de Maxwell ou de Kelvin-Voigt [16] [21], peu réalistes dans le cas des matériaux composites, il est commode d'introduire des paramètres cachés. Ces paramètres cachés n'ont pas en général de signification physique, mais ils varient au cours d'une évolution thermodynamique et doivent être pris en compte dans le calcul de la puissance massique réversible P_r de la relation (53). En statique, ces paramètres n'interviennent nullement. Une approche qui se généralise aisément consiste à aborder le problème par un nombre fini de paramètres cachés $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ et à éliminer ces paramètres à l'aide de l'identité (56) [14]. Pour rester dans le domaine linéaire, nous choisissons donc une énergie libre massique de la forme :

$$\rho f(T, \epsilon, \xi) = \frac{1}{2} c_{ijkl}(T_0) \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} + \sum_{K=1}^N B_{ijk}(T_0) \epsilon_{ij} \xi_K + \frac{1}{2} \sum_{K=1}^N \sum_{L=1}^N A_{KL}(T_0) \xi_K \xi_L + D_{ij}(T_0) \epsilon_{ij} \Delta T + \sum_{K=1}^N F_K(T_0) \xi_K \Delta T + \frac{1}{2} \gamma(T_0) \Delta T^2 \quad (76)$$

$$\text{avec} \quad \Delta T = T - T_0$$

et une dissipation intrinsèque volumique définie par :

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \sum_{K=1}^N \sum_{L=1}^N Q_{KL} \frac{d\xi_K}{dt} \frac{d\xi_L}{dt} \quad (77)$$

La dissipation volumique intrinsèque ϕ_1 étant positive d'après la relation (55), la matrice carrée $[Q] = (Q_{ij})$ d'ordre N est définie et positive, elle est de plus symétrique en vertu du principe d'Onsager (§ 2.1.3). L'identité (56) montre alors que :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= c_{ijkl}(T_0) \epsilon_{kl} + \sum_{K=1}^N B_{ijk}(T_0) \xi_K + D_{ij}(T_0) \Delta T \\ \text{avec } i, j &= 1, 2, 3 \\ - \sum_{L=1}^N Q_{KL} \frac{d\xi_L}{dt} &= B_{ijk}(T_0) \epsilon_{ij} + \sum_{L=1}^N A_{KL}(T_0) \xi_L + F_K(T_0) \Delta T \\ \text{avec } K &= 1, 2, \dots, N \\ - \rho s &= \gamma(T_0) \Delta T + D_{ij}(T_0) \epsilon_{ij} + \sum_{K=1}^N F_K(T_0) \xi_K \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

La deuxième relation (78) permet d'exprimer les paramètres cachés ξ_1, \dots, ξ_N en fonction des quantités $\epsilon = (\epsilon_{ij})$ et de la variation de température ΔT . Il s'agit, en effet, d'un système différentiel linéaire

que l'on peut résoudre aisément par l'intermédiaire de la transformée de Laplace.

En effet, si $\psi(t)$ est une fonction à support positif [$\psi(t) = 0$ pour $t < 0$], la transformée de Laplace de $f(t)$ est définie par :

$$\mathcal{L}(\psi) = \psi^*(p) = \int_0^{\infty} \psi(t) \exp(-pt) dt$$

avec p nombre complexe.

Les paramètres $\xi_K^*(p)$, $K = 1, \dots, N$ s'expriment linéairement en fonction des transformées de Laplace des déformations $\epsilon_{ij}^*(p)$ et de la variation de température $\Delta T^*(p)$, donc l'expression temporelle $\xi_K(t)$ est donnée par la convolution suivante :

$$\xi_K(t) = \sum_{L=1}^N \left\{ B_{ijk} \int_0^t S_{KL}(t-\tau) \epsilon_{ij}(\tau) d\tau + F_K \int_0^t S_{KL}(t-\tau) \Delta T(\tau) d\tau \right\} \quad (79)$$

Une présentation simple des notions de distribution, de convolution, de transformées de Laplace et de Fourier est exposée dans l'ouvrage de F. Roddier [22]. Enfin si nous remplaçons dans l'énergie libre massique f , relation (76), les paramètres cachés par leur expression donnée par la relation (79), nous constatons que cette dernière est une forme particulière de l'expression générale (80) :

$$\begin{aligned} f(T, \epsilon) &= \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t \left[G_{ijkl}(t-\tau, t-\eta) \frac{\partial \epsilon_{ij}(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \epsilon_{kl}(\eta)}{\partial \eta} \right. \\ &\quad - 2\varphi_{ij}(t-\tau, t-\eta) \frac{\partial \epsilon_{ij}(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \Delta T(\eta)}{\partial \eta} \\ &\quad \left. + m(t-\tau, t-\eta) \frac{\partial \Delta T(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \Delta T(\eta)}{\partial \eta} \right] d\tau d\eta \\ &+ \int_0^t \left\{ G_{ijkl}(t, t-\eta) \epsilon_{ij}(0) \frac{\partial \epsilon_{kl}(\eta)}{\partial \eta} \right. \\ &\quad - \varphi_{ij}(t, t-\eta) \left[\epsilon_{ij}(0) \frac{\partial \Delta T}{\partial \eta}(\eta) + \Delta T(0) \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial \eta}(\eta) \right] \\ &\quad \left. + m(t, t-\eta) \Delta T(0) \frac{\partial \Delta T(\eta)}{\partial \eta} \right\} d\eta \\ &+ \frac{1}{2} G_{ijkl}(t, t) \epsilon_{ij}(0) \epsilon_{kl}(0) - \varphi_{ij}(t, t) \epsilon_{ij}(0) + \frac{1}{2} m(t, t) [\Delta T(0)]^2 \end{aligned} \quad (80)$$

Dans l'expression (80), toutes les fonctions sont à support positif :

$$G_{ijkl}(\tau, \eta) = \varphi_{ij}(\tau, \eta) = m(\tau, \eta) = 0 \quad \text{si } \tau < 0 \text{ ou } \eta < 0$$

avec τ et η variables muettes :

$$\epsilon_{ij}(t) = \Delta T(t) = 0 \quad \text{si } t < 0$$

Les déformations $\epsilon_{ij}(t)$ et la variation de température $\Delta T(t)$ sont supposées continues pour $t > 0$; on peut généraliser la relation (80) à des champs de déformations et de variation de température discontinus [23]. L'énergie libre massique de la relation (80) est identique à celle proposée *a priori* par Christensen [24], mais l'introduction des paramètres cachés présente l'avantage de l'interprétation, outre celui de la justification : le phénomène de viscosité est caractérisé par une dissipation volumique intrinsèque qui est une expression quadratique des vitesses des paramètres.

Les fonctions introduites dans le potentiel f jouissent des propriétés de symétrie suivantes :

$$\left. \begin{aligned} G_{ijkl}(\tau, \eta) &= G_{jikl}(\tau, \eta) = G_{ijlk}(\tau, \eta) \text{ (symétrie des contraintes} \\ &\quad \text{et de déformations)} \\ G_{ijkl}(\tau, \eta) &= G_{klij}(\eta, \tau) \text{ (principe d'Onsager)} \\ \varphi_{ij}(\tau, \eta) &= \varphi_{ji}(\tau, \eta) = \varphi_{ij}(\eta, \tau) \\ m(\tau, \eta) &= m(\eta, \tau) \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Remarque : les deux intégrales suivantes I et J :

$$I(t) = \int_0^t \int_0^t F(t, \tau, \eta) d\tau d\eta, \quad J(t) = \int_0^t H(t, \tau) d\tau$$

admettent pour dérivées :

$$\frac{dI}{dt} = \int_0^t \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(t, \tau, \eta) d\tau d\eta + \int_0^t F(t, t, \eta) d\eta + \int_0^t F(t, \tau, t) d\tau$$

$$\frac{dJ}{dt} = \int_0^t \frac{\partial H}{\partial t}(t, \tau) d\tau + H(t, t)$$

sous réserve de continuité et de dérivabilité des fonctions F et H pour des arguments positifs.

En dérivant d'après la remarque précédente l'énergie libre massique f par rapport au temps, l'identité (56) fournit la loi de comportement mécanique :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \int_0^t G_{ijkl}(0, t-\eta) \frac{\partial \epsilon_{kl}(\eta)}{\partial \eta} d\eta + G_{ijkl}(0, t) \epsilon_{kl}(0) \\ &\quad - \int_0^t \varphi_{ij}(0, t-\eta) \frac{\partial \Delta T(\eta)}{\partial \eta} d\eta - \varphi_{ij}(t, 0) \Delta T(0) \end{aligned} \quad (82)$$

l'entropie massique s :

$$\begin{aligned} \rho s &= \int_0^t \varphi_{ij}(t-\tau, 0) \frac{\partial \epsilon_{ij}(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \varphi_{ij}(t, 0) \epsilon_{ij}(0) \\ &\quad - \int_0^t m(t-\tau, 0) \frac{\partial \Delta T(\tau)}{\partial \tau} d\tau - m(t, 0) \Delta T(0) \end{aligned} \quad (83)$$

et la dissipation intrinsèque volumique ϕ_1 (84) :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= -\frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t \left[\frac{\partial G_{ijkl}}{\partial t}(t-\tau, t-\eta) \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial \tau}(\tau) \frac{\partial \epsilon_{kl}}{\partial \eta}(\eta) \right. \\ &\quad - \frac{2\partial}{\partial t} \varphi_{ij}(t-\tau, t-\eta) \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial \tau}(\tau) \frac{\partial \Delta T(\eta)}{\partial \eta} \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial t} m(t-\tau, t-\eta) \frac{\partial \Delta T}{\partial \tau}(\tau) \frac{\partial \Delta T}{\partial \eta}(\eta) \right] d\tau d\eta \\ &\quad - \int_0^t \left[\frac{\partial G_{ijkl}}{\partial t}(t, t-\eta) \epsilon_{ij}(0) \frac{\partial \epsilon_{kl}}{\partial \eta}(\eta) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial t}(t, t-\eta) \left[\epsilon_{ij}(0) \frac{\partial \Delta T}{\partial \eta}(\eta) + \Delta T(0) \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial \eta}(\eta) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial m}{\partial t}(t, t-\eta) \Delta T(0) \frac{\partial \Delta T}{\partial \eta}(\eta) \right] d\eta \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} G_{ijkl}(t, t) \epsilon_{ij}(0) \epsilon_{kl}(0) \\ &\quad + \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial t}(t, t) \epsilon_{ij}(0) \Delta T(0) - \frac{1}{2} \frac{\partial m}{\partial t}(t, t) [\Delta T(0)]^2 \end{aligned} \quad (84)$$

Si la dissipation ϕ_1 fait appel à la connaissance des fonctions $G_{ijkl}(\tau, \eta)$, $\varphi_{ij}(\tau, \eta)$, $m(\tau, \eta)$ qui sont supposées continues pour les valeurs positives des arguments et nulles dans le cas contraire, les lois de comportement nécessitent uniquement la connaissance de ces fonctions pour une valeur nulle d'un des deux arguments. Un seul argument étant donc utilisé, on se contente généralement d'admettre que ces fonctions possèdent la forme particulière suivante [24] :

$$\begin{aligned} G_{ijkl}(\tau, \eta) &= R_{ijkl}(\tau + \eta) \\ \varphi_{ij}(\tau, \eta) &= a_{ij}(\tau + \eta) \\ m(\tau, \eta) &= \gamma(\tau + \eta) \end{aligned}$$

Les relations de symétrie (81) deviennent alors :

$$\left. \begin{aligned} R_{ijkl}(\tau) &= R_{jikl}(\tau) = R_{ijlk}(\tau) \\ R_{ijkl}(\tau) &= R_{klij}(\tau) \\ a_{ij}(\tau) &= a_{ji}(\tau) \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

De plus les fonctions $R_{ijkl}(\tau)$, $a_{ij}(\tau)$ et $\gamma(\tau)$ sont nulles pour les valeurs négatives de τ , continues pour les valeurs positives de τ et présentent une limite lorsque τ tend vers 0 par valeur positive. Une intégration par parties des égalités (82) et (83), compte tenu de la relation (85), permet de donner aux lois thermomécaniques à la température T_0 la forme symétrique et interprétable suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(t) &= R_{ijkl}(0) \epsilon_{kl}(t) + \int_0^t \frac{dR_{ijkl}}{d\tau}(\tau) \epsilon_{kl}(t-\tau) d\tau \\ &\quad - a_{ij}(0) \Delta T(t) - \int_0^t \frac{da_{ij}}{d\tau}(\tau) \Delta T(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (86)$$

ou encore :

$$\sigma_{ij}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t R_{ijkl}(t-\tau) \epsilon_{kl}(\tau) d\tau - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t a_{ij}(t-\tau) \Delta T(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned} \rho s(t) &= a_{ij}(0) \epsilon_{ij}(t) + \int_0^t \frac{da_{ij}}{d\tau}(\tau) \epsilon_{ij}(t-\tau) d\tau \\ &\quad - \gamma(0) \Delta T(t) - \int_0^t \frac{d\gamma}{d\tau}(\tau) \Delta T(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (87)$$

ou encore :

$$\rho s(t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t a_{ij}(t-\tau) \epsilon_{ij}(\tau) d\tau - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \gamma(t-\tau) \Delta T(\tau) d\tau$$

avec

$$\Delta T(t) = T(t) - T_0$$

L'écriture de l'égalité (86) dissocie dans cette loi de comportement la partie élasticité (termes ne comportant pas d'intégrale) et la partie mémoire ou histoire du matériau (termes comportant des intégrales). En prenant la transformée de Carson-Laplace des relations (86) et (87) [21] [22], il vient :

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\sigma}_{ij}(p) &= \tilde{R}_{ijkl}(p) \tilde{\epsilon}_{kl}(p) - a_{ij}(\tilde{p}) \tilde{\Delta T}(p) \\ \tilde{\rho s}(p) &= \tilde{a}_{ij}(p) \tilde{\epsilon}_{ij}(p) - \tilde{\gamma}(p) \tilde{\Delta T}(p) \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

Ces relations sont analogues à celles de l'élasticité (64) et (63), dans l'espace des transformées de Carson-Laplace.

On appelle **transformée de Carson-Laplace** d'une fonction $\psi(t)$ à support positif, $\psi(t) = 0$ pour $t < 0$, l'intégrale :

$$\mathcal{C}(\psi) = \tilde{\psi}(p) = p \int_0^{\infty} \psi(t) \exp(-pt) dt = p \mathcal{L}(\psi)$$

avec p nombre complexe.

$\mathcal{L}(\psi)$ est la transformée de Laplace de ψ .

Ces diverses fonctions s'interprètent en prenant, par exemple, le trajet de déformation suivant :

$$\epsilon_{ij}(t) = \begin{cases} \epsilon_{ij}^0 & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

et une variation de température ΔT constamment nulle.

D'après la relation de comportement (86), l'état des contraintes est le suivant :

$$\sigma_{ij}(t) = \begin{cases} R_{ijkl}(t) \epsilon_{kl}^0 & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \quad (89)$$

tandis que la dissipation intrinsèque ϕ_1 se réduit à :

$$\phi_1 = -\frac{1}{2} \frac{dR_{ijkl}(2t)}{dt} \epsilon_{ij}^0 \epsilon_{kl}^0 \quad (90)$$

D'après le deuxième principe de la thermodynamique, la dissipation ϕ_1 est positive selon la relation (55), ce qui implique que la forme quadratique symbolisée par dR_{ijkl}/dt est définie négative et que donc nécessairement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dR_{ijij}}{d\tau}(\tau) \leq 0 \\ \left(\frac{dR_{ijij}^2}{d\tau} \right) \leq \frac{dR_{ijij}}{d\tau} \cdot \frac{dR_{ijij}}{d\tau} \end{array} \right\} i, j = 1, 2, 3 \text{ (sans sommation)} \quad (91)$$

Les fonctions $R_{ijij}(\tau)$ sont des fonctions décroissantes de τ , d'après la relation (89) ; elles représentent l'évolution des contraintes pour un champ de déformations uniformes dans le temps et on les nomme fonctions de relaxation. Le tenseur de composantes $R_{ijkl}(t)$ est appelé tenseur de relaxation du matériau. Comme en élasticité, la correspondance tenseur d'ordre 4 matrice de rang 6 est envisageable (§ 1) et l'on parle alors de **matrice de relaxation** $\{C(t)\}$. Les inégalités (91) montrent que les termes diagonaux de la matrice de relaxation $\{C(t)\}$ sont des fonctions décroissantes du temps et ils sont de plus positifs en vertu de la relation (89). Nous pouvons résumer les propriétés de la matrice de relaxation dans le tableau 12.

Tableau 12 – Propriétés de la matrice de relaxation d'un matériau viscoélastique

$$\left. \begin{array}{l} C_{ij}(t) > 0 \quad \text{pour } t > 0 \\ C_{ij}(t) = 0 \quad \text{pour } t < 0 \end{array} \right\} i = 1, 2, \dots, 6$$

$C_{ij}(t)$ est une fonction continue non croissante pour $t > 0$ (figure 9). On ne peut rien dire quant à la positivité et à la décroissance des termes non diagonaux de $\{C(t)\}$.

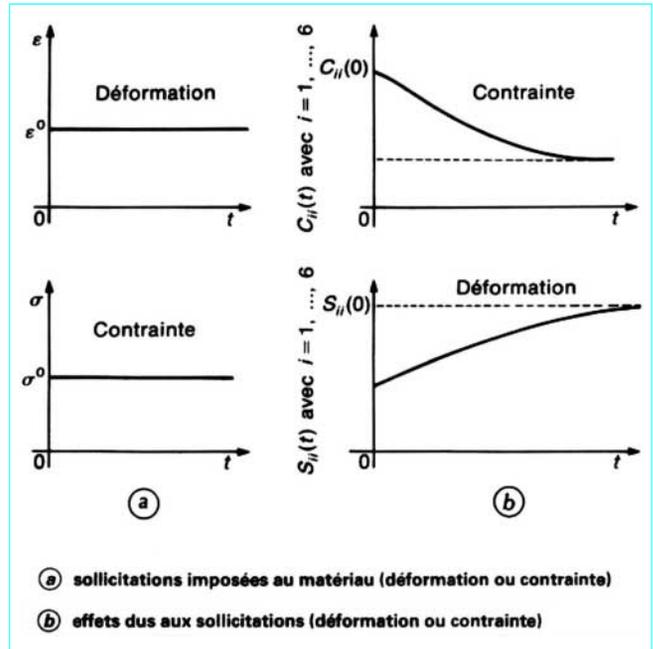


Figure 9 – Évolution à température constante des termes diagonaux des matrices de relaxation $\{C(t)\}$ et de retard à la déformation $\{S(t)\}$ en fonction du temps

Les propriétés de symétrie et de changement de base évoquées en élasticité (§ 1.2.2, 1.3 et 1.4) sont applicables intégralement à la matrice de relaxation $\{C(t)\}$. Comme en élasticité, la première relation (88) peut s'inverser pour donner :

$$\tilde{\epsilon}_{ij}(p) = \tilde{J}_{ijkl}(p) \tilde{\sigma}_{kl}(p) + \tilde{\alpha}_{ij}(p) \Delta \tilde{T}(p)$$

relation qui se traduit en régime temporel par :

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}(t) &= J_{ijkl}(0) \sigma_{kl}(t) + \int_0^t \frac{dJ_{ijkl}}{d\tau}(\tau) \sigma_{kl}(t-\tau) d\tau + \alpha_{ij}(0) \Delta T(t) \\ &\quad + \int_0^t \frac{d\alpha_{ij}}{d\tau}(\tau) \Delta T(t-\tau) d\tau \quad (92) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t J_{ijkl}(t-\tau) \sigma_{kl}(\tau) d\tau + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \alpha_{ij}(t-\tau) \Delta T(t-\tau) d\tau \end{aligned}$$

Les fonctions $J_{ijkl}(t)$ sont appelées **fonctions de retard à la déformation** et, comme en élasticité (6), elles peuvent être rangées dans une matrice de rang 6 $\{S(t)\}$ nommée **matrice de retard à la déformation**. Il faut bien noter que les matrices $\{C(t)\}$ et $\{S(t)\}$ ne sont pas inverses l'une de l'autre, mais qu'elles sont liées par la relation :

$$\{\tilde{C}(p)\} \cdot \{\tilde{S}(p)\} = \{I\} \quad (93)$$

avec $\{I\}$ = matrice identité de rang 6.

L'analogie avec l'élasticité permet de définir les modules de visco-élasticité techniques suivants, dont l'interprétation est identique à celle présentée en élasticité (§ 1.2.1) :

— **modules d'Young de relaxation** $E_i(t)$:

$$\tilde{S}_{ii}(p) = \frac{1}{E_i}(p) \Rightarrow E_i(t)$$

avec $i = 1, 2, 3$;

— coefficients de Poisson de relaxation $v_{ij}(t)$:

$$\tilde{S}_{ij}(p) = \frac{-\tilde{v}_{ij}(p)}{\tilde{E}_i(p)} = \frac{-\tilde{v}_{ji}(p)}{\tilde{E}_j(p)} \Rightarrow v_{ij}(t)$$

avec $i, j = 1, 2, 3$ et $i \neq j$:

— modules de Coulomb de relaxation $G_{ij}(t)$:

$$\tilde{S}_{kk}(p) = \frac{1}{\tilde{G}_{ij}(p)}$$

avec $k = 9 - (i + j) \Rightarrow G_{ij}(t)$.

Les trois modules de Young de relaxation $E_1(t)$, $E_2(t)$, $E_3(t)$, ainsi que les modules de Coulomb $G_{ij}(t)$ sont des fonctions non croissantes du temps [15].

Si nous soumettons le matériau composite successivement à un champ de déformations nulles et à un champ de contraintes nulles, la température étant uniforme à partir de l'instant $t = 0$ ($\Delta T = \Delta T_0$ pour $t > 0$, $\Delta T = 0$ pour $t < 0$), il vient d'après les relations (86) et (92) d'une part :

$$\sigma_{ij}(t) = \begin{cases} -a_{ij}(t) \Delta T_0 & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

et d'autre part :

$$\epsilon_{ij}(t) = \begin{cases} \alpha_{ij}(t) \Delta T_0 & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

Les tenseurs d'ordre 2 $\alpha(t) = (\alpha_{ij}(t))$ et $\mathbf{a}(t) = (a_{ij}(t))$ ont la même signification qu'en élasticité, ils ne sont pas liés par les relations (67), mais par des relations faisant appel aux intégrales de convolution :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{ij}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t J_{ijkl}(t-\tau) a_{kl}(\tau) d\tau \\ a_{ij}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t R_{ijkl}(t-\tau) \alpha_{kl}(\tau) d\tau \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

La relation (87) montre que :

$$\rho \frac{\partial s}{\partial T} = -\gamma(t)$$

tandis que les relations (51) et (52) permettent d'écrire :

$$c_\epsilon = \frac{T \partial s}{\partial T}$$

Il en résulte donc que la capacité thermique massique à la température T_0 est liée à la fonction $\gamma(t)$ par l'égalité :

$$\gamma(t) = -\frac{\rho c_\epsilon(t)}{T_0} \quad (95)$$

Une variation de température uniforme et un champ de déformations nulles montrent, grâce à la positivité de la dissipation intrinsèque ϕ_1 , d'après la relation (84), et à l'égalité (95), que la capacité thermique massique c_ϵ à déformations constantes est une fonction non décroissante positive du temps. Enfin, la relation (57), compte tenu de (87), permet d'établir l'équation de diffusion thermique au voisinage de T_0 dans un milieu viscoélastique :

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \mathbf{q} &= \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^t c_\epsilon(t-\tau) \Delta T(\tau) d\tau \\ &+ T_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^t a_{ij}(t-\tau) \epsilon_{ij}(\tau) d\tau - \phi_1 \end{aligned} \quad (96)$$

En général, on admet que le vecteur courant de chaleur \mathbf{q} est lié au gradient de température par la loi de Fourier classique (58), mais une intégrale de convolution peut également être envisagée [24].

Un certain nombre de fonctions du temps t et de la température T_0 ont été mises en évidence pour décrire le comportement thermo-mécanique d'un matériau viscoélastique. Si les fonctions de relaxation ou de retard à la déformation peuvent être déterminées relativement simplement dans le cas de matériaux isotropes (§ 3.2 et § 3.3), en régime isotherme, on dispose de très peu de données pour les matériaux composites et, particulièrement, sur l'évolution des capacités thermiques massiques (ou des conductivités thermiques) en fonction du temps. Ces deux dernières grandeurs sont en général choisies indépendantes du temps et de la température. Notons enfin que les propriétés des composites viscoélastiques sont identiques à celles des composites élastiques à condition de se placer dans l'espace des transformées de Carson-Laplace (88). Ce résultat, qui est extrêmement commode, présente l'inconvénient de ne pas prendre en compte le vieillissement du matériau [23].

3.2 Modules complexes

La transformée de Carson-Laplace est, comme nous l'avons vu, un outil symbolique mais n'offre aucune interprétation physique intéressante. La transformée de Fourier [22] véhicule, en revanche, un contenu physique (propriété énergétique, mise en évidence de périodicités, etc.) et n'est autre dans bon nombre de cas [22] que la transformée de Laplace lorsque le nombre complexe p est imaginaire pur et vaut $i\omega$.

On appelle **transformée de Fourier d'une fonction** $F(t)$ la quantité :

$$\mathcal{F}(F) = \hat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \exp(-i\omega t) dt$$

où ω est la pulsation et $f = \omega/2\pi$ la fréquence.

On trouvera, dans l'ouvrage de F. Roddier [22], une définition plus rigoureuse, plus générale et plus satisfaisante de la transformée de Fourier. Les transformées de Fourier des relations (86) et (87) s'écrivent d'après la relation (88) :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}(\sigma_{pq}) &= \tilde{R}_{pqkl}(\omega) \mathcal{F}(\epsilon_{kl}) - \tilde{a}_{pq}(\omega) \mathcal{F}(\Delta T) \\ \rho \mathcal{F}(s) &= \tilde{a}_{ij}(\omega) \mathcal{F}(\epsilon_{ij}) - \frac{\rho}{T_0} \tilde{c}_\epsilon(\omega) \mathcal{F}(\Delta T) \end{aligned} \right\}$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} \tilde{R}_{pqkl}(\omega) &= i\omega \mathcal{F}(R_{pqkl}) = i\omega \int_{-\infty}^{\infty} R_{pqkl}(t) \exp(-i\omega t) dt \\ \tilde{a}_{pq}(\omega) &= i\omega \mathcal{F}(a_{pq}) = i\omega \int_{-\infty}^{\infty} a_{pq}(t) \exp(-i\omega t) dt \\ \tilde{c}_\epsilon(\omega) &= i\omega \mathcal{F}(c_\epsilon) = i\omega \int_{-\infty}^{\infty} c_\epsilon(t) \exp(-i\omega t) dt \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

avec $i^2 = -1$.

Les identités (97) définissent respectivement :

- le tenseur de relaxation complexe (ou des rigidités complexes) $\tilde{\mathbf{R}}(\omega) = (\tilde{R}_{pqrs}(\omega))$;
- le tenseur de compressibilité $\tilde{\mathbf{a}}(\omega) = (\tilde{a}_{pq}(\omega))$;
- les capacités thermiques massiques complexes $\tilde{c}_\epsilon(\omega)$ du matériau composite.

On définit de la même manière à partir des relations (92) et (93) :

— le tenseur de retard à la déformation complexe (ou des sous-pressions complexes) $\tilde{\mathbf{J}}(\omega) = (\tilde{J}_{pqrs}(\omega))$;

— les modules d'Young complexes $\tilde{E}_k(\omega)$, $k = 1, 2, 3$;

— le tenseur de dilatation complexe $\tilde{\alpha}(\omega) = (\tilde{\alpha}_{ij}(\omega))$.

Les modules complexes s'interprètent de la manière suivante en considérant, d'une part, un champ de déformations sinusoïdales :

$$\epsilon_{pq}(t) = \epsilon_{pq}^0 \exp i\omega t$$

et, d'autre part, une variation sinusoïdale de température que nous introduisons dans les relations (86) et (87) :

$$\Delta T(t) = \Delta T_0 \exp i\omega t$$

Les tenseurs $\mathbf{R}(t)$, $\mathbf{a}(t)$ et la fonction $c_\epsilon(t)$ étant nuls pour $t < 0$, il vient :

$$\sigma_{pq}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \epsilon_{kl}^0 \exp i\omega t \int_{-\infty}^t R_{pqkl}(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau - \Delta T_0 \exp i\omega t \int_{-\infty}^t a_{pq}(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau \right\}$$

$$\rho s(t) = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \epsilon_{pq}^0 \exp i\omega t \int_{-\infty}^t a_{pq}(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau + \frac{\rho \Delta T_0}{T_0} \exp i\omega t \int_{-\infty}^t c_\epsilon(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau \right\}$$

Pour les temps très grands (t tend vers l'infini), la borne supérieure des intégrales devient infinie et les deux relations précédentes s'expriment en fonction des modules complexes (97) :

$$\sigma_{pq}(t) = \left[\tilde{R}_{pqkl}(\omega) \epsilon_{kl}^0 - \tilde{a}_{pq}(\omega) \Delta T_0 \right] \exp i\omega t$$

$$\rho s(t) = \left[\tilde{a}_{pq}(\omega) \epsilon_{pq}^0 + \rho \frac{\Delta T_0}{T_0} \tilde{c}_\epsilon(\omega) \right] \exp i\omega t$$

Au bout d'un temps suffisamment grand, un champ de déformations et de variation de température sinusoïdales produit un champ de contraintes et une entropie massique sinusoïdales déphasées par rapport aux excitations. On pose souvent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{pq}(t) = \tilde{\sigma}_{pq}(\omega) \exp i\omega t \\ s(t) = \tilde{s}(\omega) \exp i\omega t \end{array} \right.$$

et l'on retrouve ainsi, dans le domaine complexe, les lois de la thermoélasticité anisotrope (63) et (64) que l'on rapprochera des relations (63) et (64) :

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\sigma}_{pq}(\omega) = \tilde{R}_{pqkl}(\omega) \epsilon_{kl}^0 - \tilde{a}_{pq}(\omega) \Delta T_0 \\ \rho \tilde{s}(\omega) = \tilde{a}_{pq}(\omega) \epsilon_{pq}^0 + \rho \frac{\Delta T_0}{T_0} \tilde{c}_\epsilon(\omega) \end{array} \right\} \quad (98)$$

Cette interprétation des modules complexes est extrêmement intéressante puisqu'elle permet, par le biais de sollicitations sinusoïdales, d'atteindre les caractéristiques thermomécaniques complexes des matériaux viscoélastiques à la fréquence considérée. D'un point de vue plus général, ces modules complexes apparaissent dans les fonctions de transfert des structures vibrantes et sont déterminés à partir de la connaissance de ces fonctions de transfert. Les performances actuelles des chaînes de mesure (analyseur de spectre, transformée de Fourier rapide, logiciel d'analyse modale, micro-informatique) rendent l'opération réalisable.

Ces remarques, ajoutées à la simplicité des relations (98) (multiplication), et la lourdeur des égalités (86) et (87) (intégrales de convolution) font que les problèmes de viscoélasticité (calcul,

caractérisation, mesures, etc.) sont traités dans le domaine fréquentiel, le passage en régime temporel se faisant simplement par utilisation de la transformée de Fourier rapide (analyseur de spectre ou logiciel sur ordinateur).

Si la mesure des modules complexes d'un matériau isotrope [21] [25] dans une large bande de fréquences (0 à 10 MHz par exemple) est une opération relativement complexe (nécessité de disposer de plusieurs appareillages, de plusieurs éprouvettes, de logiciel de dépouillement des informations), l'anisotropie des matériaux composites conjuguée à la forme des éprouvettes (plaques minces, par exemple) rend ce problème très délicat. Il est donc extrêmement utile de disposer de quelques indications sur l'évolution des modules complexes en fonction de la pulsation ω . On peut remarquer que toute fonction $F(t)$, nulle pour les valeurs négatives de t , analytique pour $t > 0$, peut être décomposée de la manière suivante [26] [27] :

$$\left. \begin{array}{l} F(t) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \exp[-a_i t] \\ F(t) = B_0 + \sum_{i=1}^{\infty} B_i [1 - \exp(-b_i t)] \\ F(t) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{pour } t > 0 \\ \text{pour } t < 0 \end{array} \quad (99)$$

Si de plus $F(t)$ présente des valeurs asymptotiques non nulles pour t infini, les nombres a_i et b_i sont nécessairement positifs, sauf a_0 qui est nul. Enfin, si F est une fonction positive décroissante, les nombres A_i sont positifs et, si F est croissante, les nombres B_i sont positifs [15]. Les décompositions (99) montrent que la transformée de Fourier de F , $\mathcal{F}(F)$, peut prendre les deux formes suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} i\omega \mathcal{F}(F) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i\omega A_n}{a_n + i\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^2 A_n}{\omega^2 + a_n^2} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega A_n a_n}{\omega^2 + a_n^2} \\ \text{si } F \text{ est positive décroissante, } A_n > 0, \\ i\omega \mathcal{F}(F) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n b_n}{b_n + i\omega} = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n b_n}{\omega^2 + b_n^2} - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega B_n b_n}{\omega^2 + b_n^2} \\ \text{si } F \text{ est positive croissante, } B_n > 0 \end{array} \right\} \quad (100)$$

Certaines fonctions caractérisant le composite viscoélastique [$R_{ijkl}(t)$, $J_{ijkl}(t)$, $c_\epsilon(t)$, etc.] (figure 10) jouissent des mêmes propriétés que la fonction $F(t)$ précédente et les décompositions (100) permettent alors de mettre en évidence les résultats du tableau 13.

Ce tableau montre que :

— dans le cas d'une **déformation uniaxiale**, une seule composante de ϵ est non nulle, la contrainte complexe est en **avance** sur la déformation (phase positive) ;

— dans le cas d'une **contrainte uniaxiale**, une seule composante de σ est non nulle, la déformation complexe est en **retard** sur la contrainte (phase négative).

Les modules complexes des matériaux composites sont généralement représentés par leur **module** et la **tangente de l'angle de perte** ou **amortissement**. On pose alors, par exemple :

$$\left. \begin{array}{l} \text{— module :} \\ |R_{pqkl}(\omega)| = \sqrt{\text{Re}(R_{pqkl}(\omega))^2 + \text{Im}(R_{pqkl}(\omega))^2} \\ \text{— amortissement :} \\ \tan[\delta_{pqkl}(\omega)] = \frac{\text{Im}(R_{pqkl}(\omega))}{\text{Re}(R_{pqkl}(\omega))} \end{array} \right\} \quad (101)$$

avec $\delta_{pqkl}(\omega)$ angle de perte.

Tableau 13 – Comportement des caractéristiques thermomécaniques complexes d'un matériau composite en fonction de la pulsation ω (1)

Variation et signe des fonctions	Parties réelles et parties imaginaires des fonctions	Nature des fonctions
Fonctions croissantes avec la pulsation ω (ou la fréquence)	Re [$\tilde{C}_{nn}(\omega)$] avec $n = 1, 2, \dots, 6$	Fonctions de relaxation
	Re [$\tilde{E}_n(\omega)$] avec $n = 1, 2, 3$	Module d'Young de relaxation
	Re [$\tilde{G}_{pq}(\omega)$] avec $p, q = 1, 2, 3$ et $p \neq q$	Module de Coulomb de relaxation
Fonctions décroissantes avec la pulsation ω (ou la fréquence)	Re [$\tilde{S}_{nn}(\omega)$] avec $n = 1, 2, \dots, 6$	Fonctions de retard à la déformation
	Re [$c_\epsilon(\omega)$]	Capacité thermique massique à déformation constante
Fonctions positives de la pulsation ω	Im [$\tilde{C}_{nn}(\omega)$] avec $n = 1, 2, \dots, 6$	Fonctions de relaxation
	Im [$\tilde{E}_n(\omega)$] avec $n = 1, 2, 3$	Module d'Young de relaxation
	Im [$\tilde{G}_{pq}(\omega)$] avec $p, q = 1, 2, 3$ et $p \neq q$	Module de Coulomb de relaxation
Fonctions négatives de la pulsation ω	Im [$\tilde{S}_{nn}(\omega)$] avec $n = 1, 2, \dots, 6$	Fonctions de retard à la déformation
	Im [$\tilde{c}_\epsilon(\omega)$]	Capacité thermique massique à déformation constante

(1) Comportement en fonction de la pulsation ω ou de la fréquence $f = \omega/2\pi$.
Re z : partie réelle de z ; Im z : partie imaginaire de z .

Cette représentation (101) *gain-phase* est utilisée pour son interprétation ; le module traduit la propriété de rigidité du matériau et l'amortissement son aptitude à absorber les ondes et les vibrations.

Pour les composites structuraux (fibre de carbone, fibre de verre, fibre de Kevlar et matrice organique), l'amortissement est faible (de l'ordre de 10^{-2}) et l'on confond le module et sa partie réelle, le module jouissant alors des mêmes propriétés de variation que cette dernière.

Nous remarquerons que le composite verre/époxy est pratiquement élastique dans le sens des fibres et possède quasiment les propriétés d'amortissement de la résine dans le sens transversal (figure 10). Cela est dû à la bonne adhérence fibres-matrice. Le composite graphite/cuivre (figure 11) est, en revanche, nettement plus amortissant que l'un quelconque de ses constituants (de l'ordre de 10^{-4} à 10^{-3}) et cela proviendrait de la médiocre adhérence des différentes particules.

Enfin, aux pulsations extrêmes ($\omega = 0$ et $\omega = \infty$), les amortissements sont nuls (le matériau composite est donc élastique) et les modules complexes sont reliés aux fonctions de relaxation et de retard à la déformation par les égalités que l'on obtient en considérant les décompositions (99) et (100) :

$$\left. \begin{aligned} R_{pqkl}(0) &= \tilde{R}_{pqkl}(\infty) \\ R_{pqkl}(\infty) &= \tilde{R}_{pqkl}(0) \end{aligned} \right\} \text{avec } p, q, k, l = 1, 2, 3 \quad (102)$$

Les comportements extrêmes (102) sont également satisfaits par les fonctions J_{pqkl} , a_{pq} , α_{pq} et c_ϵ .

Les égalités (102) peuvent également être obtenues à partir de la propriété suivante de la transformée de Laplace $\mathcal{L}(F)$ d'une fonction $F(t)$ [27] :

$$\lim_{t \rightarrow 0} F(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \mathcal{L}(F)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \mathcal{L}(F)$$

avec $p = i\omega$.

3.3 Remarques

Nous avons insisté, dans les paragraphes 3.1 et 3.2, sur la dépendance par rapport au temps des différentes fonctions caractéristiques du matériau composite viscoélastique au voisinage d'une température T_0 , mais bien évidemment ces fonctions sont plus ou moins tributaires, comme en élasticité, de la température.

Dans le domaine expérimental, un dispositif ne peut explorer qu'une gamme relativement étroite de fréquences (200 à 600 Hz environ). Le principe de superposition fréquence-température, appelé aussi méthode WLF (Williams-Landel-Ferry) [21], permet de pallier partiellement cet inconvénient. Un refroidissement correspond à une augmentation de fréquence, un échauffement à une diminution [25]. Si ce principe est fréquemment utilisé dans la caractérisation mécanique des résines organiques, il faut être extrêmement prudent quant à son application aux composites ; il est mis en défaut pour les composites réfractaires, par exemple.

Sur le plan du calcul, les structures des composites viscoélastiques n'apportent pas de difficultés supplémentaires par rapport aux structures viscoélastiques isotropes ou aux structures élastiques anisotropes dans le domaine linéaire. Il suffit de remarquer que les transformées de Fourier des lois de comportement thermomécanique d'un composite viscoélastique (86) et (87), à une pulsation donnée, ont la même structure que celles d'un composite élastique d'après les relations (63) et (64). Dans l'espace des transformées de Fourier, le calcul des composites viscoélastiques à une fréquence donnée est identique à celui des composites élastiques à condition de remplacer les modules d'élasticité et autres caractéristiques du matériau $\mathbf{a} = (a_{ij})$, c_ϵ , etc.] par les modules complexes correspondants.

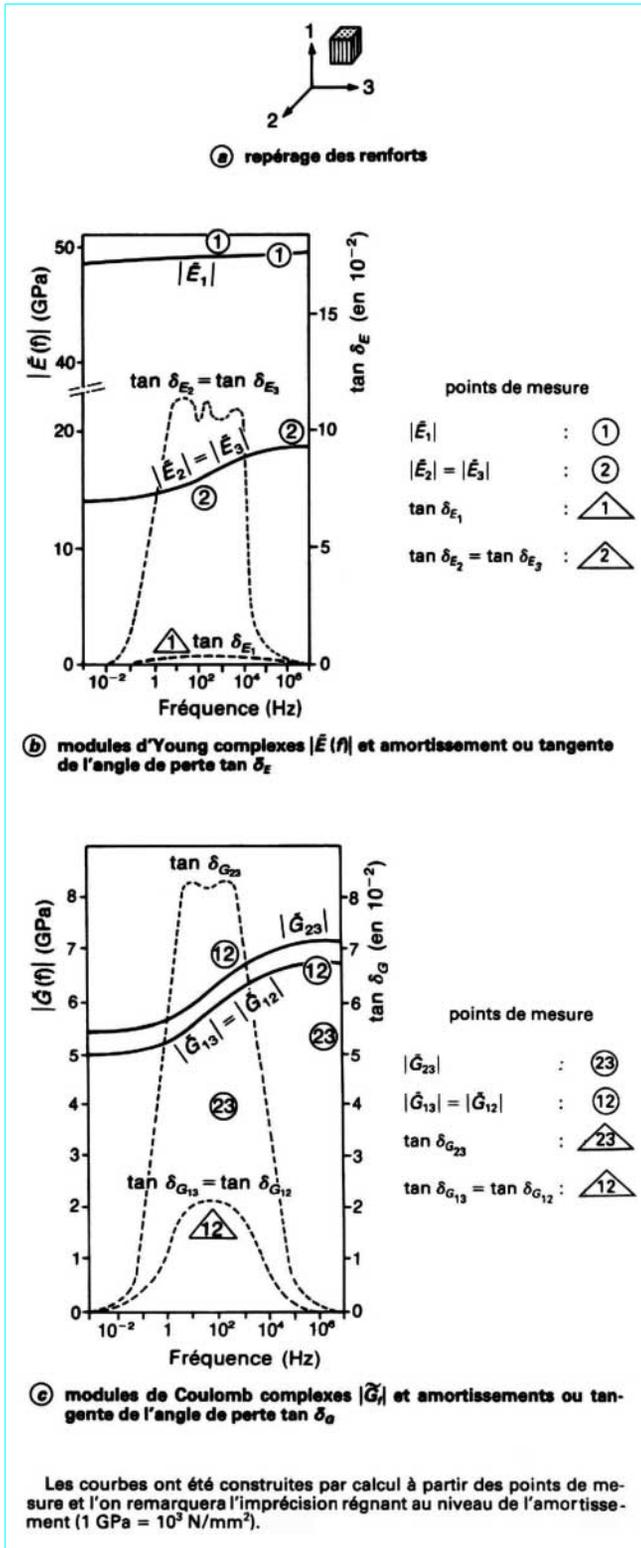


Figure 10 – Variation en fonction de la fréquence et à température ambiante des modules d'Young et de Coulomb complexes d'un composite à fibres unidirectionnelles verre/époxy comportant environ 63 % de fibres en volume (pour les courbes, se reporter à la référence [28])

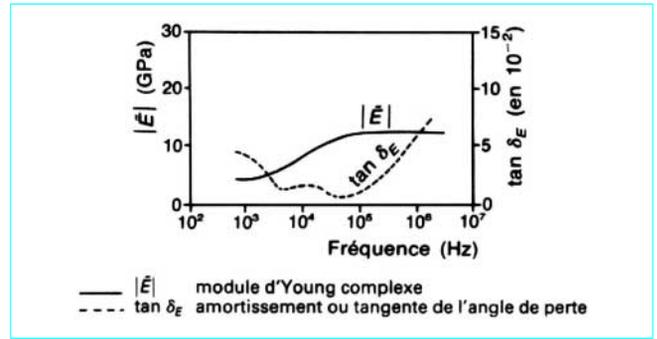


Figure 11 – Variation, à température ambiante, du module d'Young complexe d'un mélange graphite/cuivre en fonction de la fréquence

4. Comportement hydroélastique linéaire

Les propriétés mécaniques d'un matériau composite dépendent étroitement de la liaison fibres-matrice : liaison mécanique ou liaison chimique. La pénétration de molécules d'eau dans les composites altère ces liaisons, modifie les propriétés de la matrice (si cette dernière est organique), la fibre restant généralement insensible à l'humidité (cela est vrai pour les fibres de verre, de carbone, de bore, mais faux pour les fibres aramides ou *Kevlar*). Il faut donc comprendre l'influence de la pénétration de l'eau et la cinétique de l'absorption puisque les composites seront utilisés en milieu humide (eau, air marin) ou très sec (espace). Dans ce dernier cas, il s'agit d'un phénomène de désorption qui peut avoir des conséquences importantes : déformations des surfaces de réflecteur d'antennes placées sur satellite, déformations du bois lors du séchage.

Nous désignons par c la concentration d'eau dans le composite et par m la fraction massique :

$$c = \rho m \tag{103}$$

avec ρ masse volumique du milieu.

La fraction massique m est le rapport de la masse d'eau contenue dans le composite à la masse de ce dernier (ou le rapport de l'augmentation de masse du matériau à la masse initiale) et est une grandeur sans dimension.

Par analogie avec la diffusion de chaleur, il est admis que la structure ne peut recevoir de l'humidité qu'à travers sa frontière et la quantité d'humidité reçue par unité de temps est représentée par le vecteur μ appelé **vecteur courant d'humidité**. Le produit scalaire $\mu \cdot n$ représente la densité surfacique d'humidité au point x passant au travers d'une surface de normale unitaire n . L'équation locale de diffusion d'humidité s'écrit alors :

$$\frac{\partial m}{\partial t} = - \text{div.} \mu = - \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mu_3}{\partial x_3} \right) \tag{104}$$

Au voisinage d'une température T_0 et d'une fraction massique d'eau m_0 , par analogie avec la relation (60), nous choisissons une énergie libre massique f sous la forme d'une expression quadratique des variables thermodynamiques $T, \varepsilon = (\varepsilon_{ij})$ et m :

$$f(T, \varepsilon, m) = \frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - a_{ij} \varepsilon_{ij} \Delta T + \frac{1}{2} \gamma (\Delta T)^2 - b_{ij} \varepsilon_{ij} \Delta m - h \Delta m \Delta T + \frac{1}{2} r (\Delta m)^2$$

avec $\Delta T = (T - T_0)$ et $\Delta m = m - m_0$, h et r étant des coefficients.

L'identité (56) fournit respectivement :

— la loi de comportement du matériau :

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}(T_0, m_0) \epsilon_{kl} - a_{ij}(T_0, m_0) \Delta T - b_{ij}(T_0, m_0) \Delta m \quad (105)$$

— la production d'entropie massique :

$$\rho s = a_{ij}(T_0, m_0) \epsilon_{ij} - \gamma(T_0, m_0) \Delta T + h(T_0, m_0) \Delta m$$

— la dissipation intrinsèque volumique :

$$\phi_1 = \left[h(T_0, m_0) \Delta T + b_{ij}(T_0, m_0) \epsilon_{ij} + r(T_0, m_0) \Delta m \right] \frac{\partial m}{\partial t} \quad (106)$$

Rappelons que la dissipation ϕ_1 doit être positive. Conformément à la relation (52), γ est relié à la capacité thermique massique à déformation constante :

$$\gamma(T_0, m_0) = - \frac{\rho c_\epsilon(T_0, m_0)}{T_0}$$

Le tenseur de compressibilité thermique, dont les propriétés ont été évoquées dans le paragraphe 2.2, est $\mathbf{a} = (a_{ij})$, il s'exprime en pascals par kelvin.

Le tenseur de compressibilité hygrométrique du milieu $\mathbf{b} = (b_{ij})$ s'exprime en pascals et possède les mêmes propriétés que \mathbf{a} .

En adoptant la même démarche que dans le paragraphe 2.2, on peut inverser la relation de comportement (105) et écrire :

$$\epsilon_{ij} = s_{ijkl}(T_0, m_0) \sigma_{kl} + \alpha_{ij}(T_0, m_0) \Delta T + \beta_{ij}(T_0, m_0) \Delta m$$

avec $\alpha = (\alpha_{ij})$ tenseur de dilatation thermique,

$\beta = (\beta_{ij})$ tenseur de dilatation hygrométrique (il est sans dimension).

Le tenseur de dilatation hygrométrique est lié au tenseur de compression hygrométrique par les relations :

$$\left. \begin{aligned} \beta_{ij}(T_0, m_0) &= s_{ijkl}(T_0, m_0) b_{kl}(T_0, m_0) \\ b_{ij}(T_0, m_0) &= c_{ijkl}(T_0, m_0) \beta_{kl}(T_0, m_0) \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

D'une manière générale, le tenseur de dilatation hygrométrique possède les mêmes propriétés de symétrie et de changement de base que le tenseur de dilatation thermique, d'après les relations (68) et (59), en particulier pour un matériau orthotrope. Il est appelé **coefficient de gonflement** ou **d'expansion du matériau** :

$$\beta = (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)$$

La dilatation hygrométrique des composites industriels est, en général, très inférieure à la dilatation thermique. Dans le cas d'un matériau stratifié 0-90° carbone/époxy, par exemple, les caractéristiques sont les suivantes :

- coefficient de gonflement : $\beta \approx 18 \times 10^{-3}$;
- coefficient de dilatation cubique : $\alpha \approx 10^{-4} \text{ K}^{-1}$;
- fraction massique maximale d'eau : $m_\infty = 0,8 \%$.

La variation maximale de volume relatif due à l'humidité vaut :

$$\frac{\Delta V_H}{V} = \beta \times 0,8 \times 10^{-2} = 1,44 \times 10^{-4}$$

tandis que la variation de volume due à une variation de température de 10 K est dix fois supérieure à la précédente et a pour valeur :

$$\frac{\Delta V_T}{V} = 10^{-4} \times 10 = 10^{-3}$$

Les termes croisé $h \Delta m \Delta T$ et quadratique $r(\Delta m)^2$ sont donc en général supprimés dans le potentiel f . Ils disparaissent alors de l'entropie massique s et de la dissipation intrinsèque volumique ϕ_1 qui se réduit à :

$$\phi_1 = b_{ij} \epsilon_{ij} \frac{\partial m}{\partial t}$$

Ainsi, la relation de conservation de l'énergie au voisinage de T_0 s'écrit sous la forme :

$$- \text{div. } \mathbf{q} = \rho c_\epsilon \frac{\partial T}{\partial t} + T_0 a_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} - b_{ij} \epsilon_{ij} \frac{\partial m}{\partial t}$$

Pour achever la résolution du problème, il reste à préciser les lois d'état complémentaires et l'on admet en général que les gradients (de la température et de la fraction massique d'eau) sont les moteurs de la dissipation :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q} &= - [\lambda] \text{ grad } T && \text{(loi de Fourier)} \\ \boldsymbol{\mu} &= - [D] \text{ grad } m && \text{(loi de Fick)} \end{aligned} \right\} \quad (108)$$

avec $\lambda = (\lambda_{ij}(T_0, m_0))$ tenseur de conductivité thermique du matériau,

$D = (D_{ij}(T_0, m_0))$ tenseur de diffusion hygrométrique du matériau.

Ces deux tenseurs jouissent des mêmes propriétés de symétrie et de changement de base que les tenseurs \mathbf{a} , \mathbf{b} , α et β . L'équation de la chaleur prend alors la forme :

$$\lambda_{ij} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = \rho c_\epsilon \frac{\partial T}{\partial t} + T_0 a_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} - b_{ij} \epsilon_{ij} \frac{\partial m}{\partial t} \quad (109)$$

tandis que l'équation de diffusion de l'humidité, résultant de la relation (104), s'écrit :

$$D_{ij} \frac{\partial^2 m}{\partial x_i \partial x_j} = \rho \frac{\partial m}{\partial t} \quad (110)$$

Il arrive que les effets thermique et hygrométrique soient couplés, c'est-à-dire que les lois d'état complémentaires (108) admettent la forme suivante (17) :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q} &= - [\lambda] \text{ grad } T + [L] \text{ grad } m && \text{(effet de Dufour)} \\ \boldsymbol{\mu} &= - [D] \text{ grad } m + [L]^t \text{ grad } T && \text{(effet de Soret)} \end{aligned} \right\}$$

La même matrice 3×3 $[L]$ intervient dans les relations ci-avant à cause de la symétrie stipulée dans le principe d'Onsager (§ 2.1.3) ($[L]^t$: transposée de $[L]$).

Nous avons noté que, dans certains cas, les effets hygrométriques étaient négligeables devant les effets thermiques ; de plus les termes de couplage thermomécaniques sont négligeables dans la relation (109) si les vitesses de déformations thermiques $d\epsilon_{ij}/dt$ sont de l'ordre de grandeur de la vitesse de variation relative de température (§ 2.3.3). On aboutit alors à une **théorie découplée** régie par les équations suivantes :

— **relation de comportement mécanique** :

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}(T_0, m_0) \epsilon_{kl} - a_{ij}(T_0, m_0) \Delta T - b_{ij}(T_0, m_0) \Delta m$$

— **équation du mouvement** :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

— **équation de la chaleur** :

$$\lambda_{ij}(T_0, m_0) \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = \rho c_\epsilon(T_0, m_0) \frac{\partial T}{\partial t}$$

— **équation de diffusion de l'humidité** :

$$D_{ij}(T_0, m_0) \frac{\partial^2 m}{\partial x_i \partial x_j} = \rho \frac{\partial m}{\partial t}$$

Le modèle simple de diffusion n'est pas applicable à tous les composites. On admet alors, d'après la relation (108), que l'eau ne diffuse plus entièrement, mais qu'une partie s'attache à la matrice ou se coince dans le composite ; les modèles sont plus réalistes car

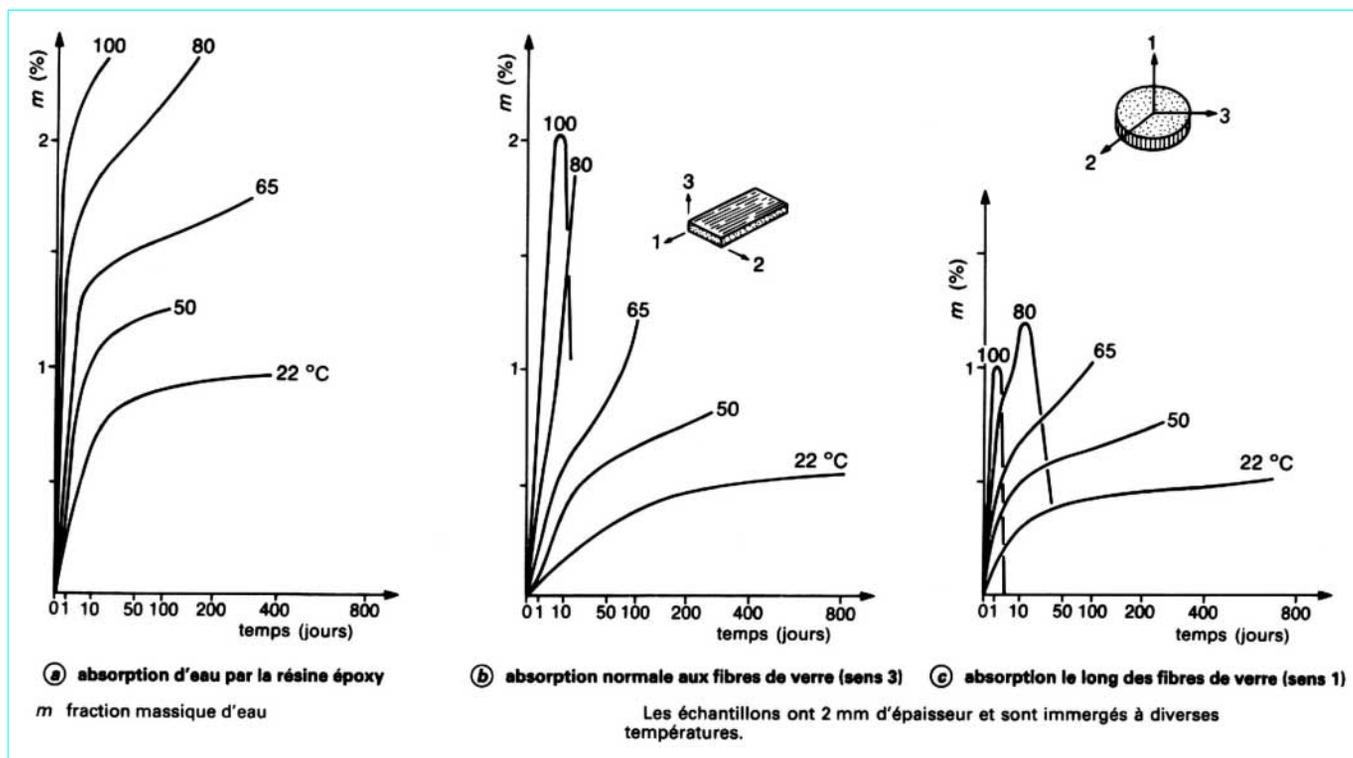


Figure 12 – Courbes expérimentales d'absorption d'eau par des échantillons de fibre de verre/résine époxy (d'après [30])

ils font intervenir la notion de hasard (probabilité que l'eau reste attachée à la matrice, par exemple) et sont basés sur le modèle de Langmuir (figure 12) qui a trait à la diffusion des neutrons dans la matière [30] [31].

La connaissance précise des tenseurs de dilatation thermique α et hygrométrique β est indispensable dans la réalisation de structures spatiales qui, outre leur grande rigidité spécifique, exigent une bonne stabilité dimensionnelle (déplacements dus à la variation de température et à la dessiccation de l'ordre du micromètre). Les matériaux composites répondent à ces deux exigences puisque l'on peut, lors de la fabrication d'un stratifié par exemple, jouer sur le drapage pour obtenir des tenseurs de dilatation thermique et hygrométrique voisins de zéro. Signalons enfin qu'une théorie non locale dans le temps (§ 3) et faisant appel à des lois de comportement intégrales peut être envisagée dans le cadre de l'humidité. Dans cette voie, aucune publication ne semble actuellement disponible.

5. Conclusion

Un matériau composite est engendré par de multiples opérations influant chacune sur le résultat final ; on estime à environ 300 le nombre de paramètres dont dépend la fabrication d'un composite carbone/carbone, par exemple, et qu'il faut maintenir constants d'une pièce à l'autre. On ne peut donc parler de matériau composite

proprement dit mais de structure composite. Cela explique également la grande dispersion régnant au sein des caractéristiques élastiques (ou autres) de ces matériaux et l'information figurant dans la littérature ne correspond pas forcément au matériau que l'on étudie. Le matériau composite n'est également pas identique en tout point parce que, par exemple, la technique de réalisation ne le permet pas (les angles de croisement des fils bobinés varient obligatoirement le long d'une évolution) et les différents concepts que nous avons présentés dans cet article (modules d'élasticité, fonctions de relaxation, etc.) ont donc un caractère moyen qui ne permet que de déterminer l'évolution globale de la structure. À ces difficultés, qui sont inhérentes au modèle adopté, viennent s'ajouter les difficultés dues à l'anisotropie mécanique ; d'une manière générale, les approximations couramment admises dans le comportement thermomécanique des milieux isotropes doivent être remises en question dans l'étude des structures composites. La thermodynamique des milieux continus se présente alors comme un outil suffisamment souple et rigoureux pour mettre en évidence les effets désirés ; la viscoélasticité et l'hygroélasticité sont là pour en témoigner. Enfin, si le modèle linéaire a été développé à cause de sa simplicité, dans le domaine des composites, il faut toujours penser :

- que la plage de validité de la linéarité dépend de la direction envisagée [3] ;

- que, pour deux constituants donnés, la linéarité dépend de la nature du renfort : le comportement mécanique d'un composite à renfort unidirectionnel est bien plus linéaire que celui d'un tissu.

Comportements élastique et viscoélastique des composites

par **Yvon CHEVALIER**

Docteur ès Sciences

Maître de Conférences à l'Institut Supérieur des Matériaux et de la Construction Mécanique (ISMCM)

Références bibliographiques

+ historique de la question,

* étude théorique de la question,

Δ comporte des résultats d'essais de laboratoire,

▲ comporte des résultats pratiques ou industriels,

○ étude technologique de la question,

□ description d'appareillages ou d'installations.

- [1] TUAN (P.D.) et VERCHERY (G.). – *Théorie des plaques sandwichs assurant les continuités du déplacement et de la contrainte aux interfaces*. CR Acad. Sc., 282, p. 1839-42, 4 fig., bibl. (10 réf.), mai 1976 (*).
- [2] LE NIZERHY (D.), VINH (T.) et CHEVALIER (Y.). – *Sur les vibrations des poutres en matériau composite. Couplage éventuel avec la torsion et effets d'inertie par rotation et cisaillement*. CR Acad. Sc., 277, p. 471-4, 2 fig., sept. 1973 (*).
- [3] DELNESTE (L.). – *Composites multi-directionnels. Calcul des structures en matériaux composites*. Publié par F. JOUBERT et A. MASSIAH, 514 p., Bordeaux, Codemac (1983) (*).
- [4] DUC (J.) et BELLET (D.). – *Mécanique des solides réels, élasticité*. 211 p. bibl. (24 réf.), Toulouse, Éd. Cepadues (1977) (+ *).
- [5] LEKHNITSKII (S.G.). – *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body* (Théorie de l'élasticité d'un corps anisotrope). 404 p., bibl. (56 réf.), San Francisco, Holden-Day Inc. (1963) (*).
- [6] JONES (R.M.). – *Mechanics of composite materials* (Mécanique des matériaux composites). 355 p., bibl. (26 réf.), New York, McGraw Hill (1975) (+ * Δ).
- [7] FIDELER (B.). – *Caractérisation mécanique du bois, méthodes dynamiques de mesures des constantes élastiques*. 191 p., bibl. (12 réf.), Paris mémoire de diplôme d'ingénieur, CNAM (1983) (* Δ).
- [8] VINH (T.), CHEVALIER (Y.) et LE NIZERHY (D.). – *Mécanique des matériaux composites. Caractérisation mécanique. Études dynamiques*. 161 p., bibl. (45 réf.), Saint-Ouen, Cours polycopié ISMCM (1977) (* Δ).
- [9] VERCHERY (G.). – *Matériaux composites, calcul des caractéristiques mécaniques*. Extrait du guide des matières plastiques en mécanique. 1, Senlis 2^e trim., p. D1-D39, 2 tabl., 50 fig., CETIM (1976) (* Δ).
- [10] BOEHLER (J.P.). – *Loi de comportement anisotrope des milieux continus*. J. de Mécanique (F), 17, n° 2, p. 153-89, 3 tabl., bibl. (44 réf.) (1978) (*).
- [11] HAHN (H.T.). – *A derivation of invariant of fourth rank tensors* (Extraction des invariants des tenseurs d'ordre 4). J. Composite Materials (USA), 8, p. 2-14, 1 tabl., 4 fig., bibl. (9 réf.), janv. 1974 (* Δ).
- [12] TSAI (S.W.) et WU (E.M.). – *A general theory of strength for anisotropic materials* (Théorie générale de la résistance des matériaux anisotropes). J. Composite Materials (USA), 5, p. 58-80, 2 tabl., 6 fig., bibl. (10 réf.), janv. 1971 (* Δ).
- [13] TSAI (S.W.). – *Introduction to composite materials* (Introduction à l'étude des matériaux composites). 457 p., bibl. (19 réf.), Westport, Technomic Publishing (1980) (* Δ).
- [14] WU (E.M.), JERINA (K.L.) et LAVENGOOD (R.E.). – *Data averaging of anisotropic composite material constants* (Lissage des modules d'élasticité des matériaux composites anisotropes). *Analysis of test methods for high modulus fibers and composites* (Analyse des méthodes d'essai pour les fibres haut module et les composites). ASTM-STP 521, p. 229-43, 2 tabl., 7 fig., bibl. (10 réf.), American Society for Testing and Materials (1973) (* Δ).
- [15] CHEVALIER (Y.). – *Mécanique des matériaux composites*. Fascicule I : *Matériaux composites, présentation, fabrication, utilisation*. Fascicule II : *Comportement macroscopique, élasticité et viscoélasticité anisotrope*. 186 p., bibl. (37 réf.), Saint-Ouen, cours polycopié ISMCM (1986) (* Δ).
- [16] GERMAIN (P.). – *Cours de mécanique des milieux continus*. Tome 1 : *Théorie générale*. 417 p., bibl. (19 réf.), Paris, Masson et Cie (1973) (+ *).
- [17] FUNG (Y.C.). – *Foundations of solid mechanics* (Bases de la mécanique des solides déformables). 507 p., bibl. (447 réf.), Englewood Cliffs, Prentice-Hall Inc. (1965) (*).
- [18] ADJADJ (P.). – *Sur l'endommagement et la rupture de stratifiés carbone/époxy*. 55 p., bibl. (15 réf.), Saint-Ouen, Stage de fin d'étude CESTI (1986) (Δ).
- [19] BROQUERE (B.H.). – *Les composites carbone-carbone*. Mécanique Matériaux Électricité, Journal du GAMI (F), n° 412, p. 6-10, 8 fig., bibl. (8 réf.), juin-sept. 1985 (Δ).
- [20] LAMICQ (P.J.). – *Les céramiques/céramiques*. Mécanique Matériaux Électricité, Journal du GAMI (F), n° 412, p. 11-4, 7 fig., juin-sept. 1985 (○ Δ).
- [21] PERSOZ (B.). – *La rhéologie*. Monographie du Centre d'Actualisation Scientifique et Technique de l'INSA, 118 p., 8 auteurs, bibl. (136 réf.), Paris Masson et Cie (1969) (* Δ).
- [22] RODDIER (F.). – *Distributions et transformation de Fourier*. 286 p., bibl. (14 réf.), Paris, Ediscience SA (1971).
- [23] SALENÇON (J.). – *Viscoélasticité. Cours de calcul des structures anélastiques*. 92 p., bibl. (9 réf.), Paris, Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées (1983).
- [24] CHRISTENSEN (R.M.). – *Theory of viscoelasticity, an introduction* (Introduction à la théorie de la viscoélasticité). 245 p., bibl. (179 réf.), New York, Academic Press Inc. (1971) (* Δ).
- [25] FERRY (J.D.). – *Viscoelastic properties of polymers* (Propriétés des polymères viscoélastiques). 482 p., bibl. (934 réf.), New York, John Wiley and Sons (1961) (Δ).
- [26] GROSS (R.). – *Mathematical structure of the theories of viscoelasticity* (Structure mathématique des théories de la viscoélasticité). *Actualités Scientifiques et Industrielles* 1190. 71 p., bibl. (67 réf.), Paris Hermann (1968) (*).
- [27] SCHWARTZ (L.). – *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. 392 p., Paris Hermann (1961) (*).
- [28] CHEVALIER (Y.). – *Calcul de prévision de quelques matériaux composites*. Mécaniques Matériaux Électricité, Journal du GAMI, n° 412, p. 28-35, 9 fig., bibl. (12 réf.), juin-sept. 1985 (* Δ).
- [29] ZEMANIAN (A.H.). – *Distribution theory and transform analysis* (Théorie des distributions et des transformées intégrale). 365 p., bibl. (47 réf.), New York, McGraw Hill (1965) (*).
- [30] BUNSELL (A.R.). – *L'absorption d'eau par les composites à matrice organique. Calcul des structures en matériaux composites*. Publié par F. JOUBERT et A. MASSIAH, 514 p., Bordeaux, Codemac (1983) (* Δ).
- [31] BICKEL (A.). – *Travaux sur la stabilité dimensionnelle des matériaux composites*. 256 p., bibl. (22 réf.), Saint-Ouen, Stage de fin d'étude CESTI (1987) (Δ).
- [32] GAY (D.). – *Matériaux composites. Traité des nouvelles technologies, série mécanique*. 416 p., bibl. (25 réf.), Paris, Hermès (1987) (* Δ ▲ □).

Fournisseurs. Fabricants

Fibres

Brochier SA Ateliers.
Le Carbone Lorraine Aérolor. Département spécialités matériaux avancés.
Du Pont de Nemours International SA. Département fibres industrielles.
OCF Owens-Corning Fiberglas SA.
Sotiver Saint-Gobain.
Stevens Genin Tissus industriels.

Résines

Alsthom Éts Fibre et Mica SA.
Brochier SA Ateliers.

La Bakélite SA.
CDF Chimie Norsolor.
CECA SA.
Ciba-Geigy SA Matières plastiques.
DSM Résines France.
Hoechst (Sté Française).
Lambert Rivière SA.
Narmco et Cie Centre de Production.
Organo Synthèse (Sté Française).
Rhône-Poulenc Plastiques techniques.
Schenectavy (Sté).

Organismes

Association pour les Matériaux Composites (AMAC).
Comité pour le Développement des Matériaux Composites (CODEMAC).

Centre d'Études Techniques des Industries Mécaniques (CETIM).
Institut des Matériaux Composites.

Laboratoires publics

École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace.
École des Mines de Paris.
École des Mines de Saint-Étienne.
École Nationale Supérieure des Techniques Avancées (ENSTA).
École Nationale d'Ingénieurs de Tarbes.
Faculté des Sciences de Bordeaux.

Faculté des Sciences de Toulouse.
Faculté des Sciences d'Orléans.
Institut Supérieur des Matériaux et de la Construction Mécanique (ISMCM).
Institut National des Sciences Appliquées (INSA).
Université Technologique de Compiègne (UTC).